

*Können bekannte Lösungen nicht nur auf Gesamtgraphen
sondern auch auf Teilgraphen angewandt werden,
so bringt die ZIP-Methode den entscheidenden
Quantensprung der rechentechnischen Vereinfachung.*

ZIP-Methode

**ein kombinatorischer Ansatz
zur optimalen Lösung allgemeiner
Traveling-Salesman-Probleme (TSP)**

$$\frac{(n-1)!}{\left(\frac{n}{2}-1\right)! \cdot 2^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}}$$

© Jochen Pleines
Dachsweg 6
D-78532 Tuttlingen
Tel: 07461-79194
e-mail: jochen.pleines@web.de
<http://www.jochen-pleines.de>

Stand: 02.02.2006

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	2
Vorbemerkung	3
1 Das Traveling-Salesman-Problem	4
1.1 Problemstellung	5
1.2 Graphentheoretische Beschreibung	5
1.3 Ergänzende Erläuterungen	6
2 Bisherige kombinatorische Lösungsansätze	7
2.1 Optimallösung durch vollständige Enumeration	7
2.2 Optimallösung durch begrenzte Enumeration	7
2.3 suboptimale Lösungen	7
3 Neuer kombinatorischer Lösungsansatz	8
3.1 Hauptansatz	8
3.2 Verfahrensbeschreibung	9
3.2.1 Zahlenwert-unabhängige Regeln	9
3.2.2 Zahlenwert-abhängige Regeln	10
3.2.3 Iterationsschritte	11
3.3 Mächtigkeiten	12
3.4 Zusammenfassung des neuen Lösungsansatzes	13
3.5 Eine Klassifizierung von optimalen TSP-Lösungen	14
4 Beispiele	15
4.1 Beispiel mit 6 Knoten	16
4.2 Beispiel mit 10 Knoten	19
4.3 Beispiel mit 26 Knoten (Weihnachtsrätsel)	23
5 Feststellungen und Ausblick	30
5.1 Feststellungen	30
5.2 Ausblick	30
Literaturverzeichnis	31
Anmerkungen	32
Zur Geschichte der ZIP-Methode	32
Zur Entwicklung der ZIP-Formel	34
26-Knoten-TSP: Zur Mindestkantenregel	36
10-Knoten-TSP: Häufigkeitsverteilung Teilgraph / Graph	37
10-Knoten-TSP: Vergleich Anzahl Teilgraphen / Graphen	39
6-Knoten-TSP: alle 120 Graphen mit ihren Teilgraphen	40

Vorbemerkung

Zur Idee der ZIP-Methode ein paar Beispiele aus dem täglichen Leben:

1. Beim Lotto "6 aus 49" werden in jeder Woche 6 aus 49 möglichen Zahlen gezogen. Dabei können dieselben Zahlen in verschiedener Reihenfolge gezogen werden; bei 6 Zahlen sind es genau 720 Möglichkeiten. Dem Gewinner ist die Reihenfolge aber gleichgültig, ihm kommt es nur auf die richtigen Zahlen an. Im übrigen werden am Ende alle Zahlen in ihrer "natürlichen" Reihenfolge angezeigt und nicht in der Reihenfolge, wie sie gezogen wurden.
2. Der Preis für alle Waren eines Warenkorbes ist (hoffentlich) immer gleich, unabhängig davon, in welcher Reihenfolge die Kassiererin die Preise der einzelnen Waren eintippt.
3. Nehmen Sie drei Farbstifte und legen Sie diese in einer Reihe auf den Tisch. Wie viele verschiedene Möglichkeiten haben Sie ? Genau 48 ! Wollen Sie die Länge der Stifte wissen, reicht es aber aus, die Stifte nur einmal zu messen.
4. Gleiches gilt für ein Domino-Spiel. Haben Sie drei Steine, ist es für die Augenzahl der Steine unerheblich, wie Sie diese Steine vor sich aufbauen. Und in welcher Reihenfolge Sie Ihre Steine dann beim Spiel einsetzen, hängt außerdem vom Gegenspieler ab.

Oft spielt gerade die Reihenfolge bzw. die Richtung für die eigentliche Fragestellung keine Rolle, obwohl wir bei der Ermittlung des Ergebnisses immer in irgendeiner Reihenfolge - Schritt für Schritt - vorgehen. Bei einer Rundreise wird zwar jeder Ort in einer bestimmten Reihenfolge berührt, gesucht wird beim TSP jedoch nicht die Reihenfolge der besuchten Orte sondern eine minimale Entfernung zwischen allen Orten. Dabei kommt es für das Ergebnis nicht darauf an, auf welche Art und Weise dieses ermittelt wird. Der Autor nutzt in seinen Beispielen für die ZIP-Methode die Aufzählung (Enumeration), die für kleine Bereiche völlig ausreichend ist. Als generelle Lösung für das allgemeine TSP ist die Enumeration in der Tat eine absurde Idee, wie auch M. Grötschel in einer unveröffentlichten e-mail schreibt. Um die Enumeration geht es bei der ZIP-Methode aber nicht. Durch die Zerlegung jeder Rundreise in zwei gleichstrukturierte Teile und ihre Zusammenführung "wie ein Reißverschluss (ZIP)" gelingt es dem Autor, mehrfache Berechnungen derselben Teile zu vermeiden und so die Anzahl der notwendigen Berechnungen zu minimieren.

1 Das Traveling-Salesman-Problem

Das Traveling-Salesman-Problem (TSP), auch als Rundreiseproblem oder Problem des Handelsreisenden (bzw. Handlungsreisenden) bezeichnet, ist eines der berühmtesten Probleme in der kombinatorischen Optimierung. In der Regel unterscheidet man zwischen nicht-symmetrischen TSP und dem sehr häufig auftretenden Fall von symmetrischen TSP. Dabei sind die Wege, eine Lösung für TSP zu finden, oft von der räumlichen Vorstellung einer Rundreise geprägt.

Der Weltrekord einer optimalen Lösung von symmetrischen TSP liegt seit Mai 2004 vorläufig bei 24978 Orten. Beim früheren Rekord über 13509 Orte im Jahre 1998 hatten D.APPLEGATE, R.BIXBY und W.COOK (Rice University in Houston, Texas / USA) sowie V.CHVATAL (Rutgers University in New Brunswick, New Jersey / USA) mit Hilfe eines Clusters von drei Digital AlphaServer 4100s und eines Clusters von 32 Pentium-II PCs das Optimum berechnet. Die Berechnung dauerte drei Monate und basierte auf der Methode „Lineare Programmierung“.

Untersucht man bekannte Optimallösungen von symmetrischen TSP mit vielen Orten¹, so stellt man fest, dass ausnahmslos alle TSP neben der Symmetrie außerdem als zusätzliche Spezialität die Ortsbezogenheit besitzen, d.h. es werden für jeden Ort die Koordinaten angegeben, aus denen sich dann die kürzeste Entfernung zwischen je zwei Orten berechnen läßt. Die Entfernungen entsprechen den Ausprägungen des interessierenden Merkmals, deren Summe zu minimieren ist. Die Verbindung zwischen zwei Orten besitzt somit nicht nur das Merkmal „Länge“, sondern außerdem implizit als zusätzliches Merkmal die „Lage im Raum“. Dieses zusätzliche Merkmal ist entscheidend dafür, dass unabhängig vom Wert der Länge bestimmte Verbindungen für die Lösung ausgeschlossen werden können und so die Problemstellung enger wird. Kreuzt sich z.B. der Weg einer Rundreise, so wird das Ergebnis der Optimierung dadurch verbessert, dass die beiden sich überschneidenden Verbindungen der vier beteiligten Orte gegen zwei gegenüberliegende Verbindungen ausgetauscht werden. Der Austausch der Verbindungen erfolgt nicht wegen der Länge sondern wegen der örtliche Lage der Verbindungen. Diese Fälle von raumbezogenen symmetrischen TSP kann man daher als gelöst ansehen.

Anders verhält es sich für den allgemeinen Fall von symmetrischen TSP, bei denen keine zusätzlichen Merkmale für die Lösung herangezogen werden und die Ausprägungen des interessierenden Merkmals beliebige positive und negative Werte annehmen können. Alle bekannten Verfahren zur Ermittlung einer Optimallösung laufen auf eine vollständige Analyse der $n!$ möglichen Rundreisen hinaus. Bis heute ist noch kein Algorithmus bekannt, der weniger als exponentiellen Zeitaufwand (bezogen auf die Anzahl der Orte) benötigt, um eine optimale Rundreise zu ermitteln. So sind nach herrschender Ansicht für

¹ In TSPLIB: Bibliothek von TSP und vergleichbaren Problemen, zusammengestellt von Bixby, B., Reinelt, G., Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

symmetrische TSP strikt kombinatorische Lösungsansätze wie die enumerative Berechnung von symmetrischen Rundreisen mit 25 Orten nicht möglich².

Mit der hier beschriebenen „ZIP-Methode“³ lassen sich solche symmetrische Rundreisen enumerativ in kurzer Zeit optimal lösen. Symmetrische Rundreisen mit bis zu zehn Orten können mit der ZIP-Methode ggf. sogar ohne jedes Hilfsmittel gelöst werden. Grundsätzlich ist diese Methode auch auf nicht-symmetrische Rundreiseprobleme anwendbar. Die Grundidee ist allgemeiner Natur und schließt alle Spezialfälle ein. Inwieweit die ZIP-Methode einen Durchbruch für die optimale Berechnung von allgemeinen symmetrischen und nicht-symmetrischen TSP bedeutet, muss sich in der Zukunft erweisen. In jedem Fall wird die Grenze der Berechenbarkeit optimaler TSP nach oben verschoben. Die ZIP-Methode lässt sich sicherlich nicht nur auf die begrenzte Enumeration sondern auch auf andere Lösungsmethoden anwenden. Dazu enthalten die drei Beispiele eine Vielzahl von Anregungen für weitere Untersuchungen.

1.1 Problemstellung

Beim Traveling-Salesman-Problem soll die kürzeste Entfernung zwischen n verschiedenen Orten P_i gefunden werden. Dabei sollen ausgehend vom Ort P_i alle übrigen Orte genau einmal aufgesucht werden. Die Rundfahrt soll wieder in P_i enden.

Wie bereits der Name „Traveling-Salesman-Problem“ aussagt, hat man bei dieser häufig benutzten Definition die räumlichen Vorstellung einer Rundreise, was leicht dazu verführt, die Orte zu lokalisieren, d.h. zum Merkmal „Länge“ implizit ein weiteres Merkmal „Lage im Raum“ hinzuzufügen. Beim TSP ist die „Rundreise“ nur ein Bild, um das Problem anschaulich zu machen. Die Definition des TSP als ein geometrisch-geographisches System, wie es u.a. von Wolfgang Oberstenfeld (<http://www.rundreiseproblem.de>) beschrieben wird, greift nach Überzeugung des Autors für das allgemeine, bedingungsfreie TSP zu kurz.

Somit ist das TSP(min) ein minimaler Hamiltonkreis in einem Graphen, völlig unabhängig davon, was zu minimieren ist. Müller-Merbach spricht hier allgemein von „Kosten“. Besser als das Bild einer Rundreise ist daher die graphentheoretische Beschreibung.

Bemerkung:

Das Minimum steht stellvertretend auch für das andere Extrem Maximum, was hier aber nicht untersucht werden soll.

1.2 Graphentheoretische Beschreibung

Aus graphentheoretischer Sicht bezeichnet man die Orte einer Rundreise als Knoten x_i , sowie die Verbindung zwischen jeweils zwei

² Vgl. Grötschel M, Padberg M „Die optimierte Odyssee“ in: Spektrum der Wissenschaft 4/99, S.80.

³ Für den neuen Lösungsansatz wurde die Bezeichnung „ZIP-Methode“ gewählt, weil bei der Berechnung jede Rundreise wie ein Reißverschluss (englisch = zip) in zwei gleich große Teilmengen zerlegt und wieder zusammengefügt wird.

Orten als Kante $u = (x_i, x_j)$ bzw. $u^* = \langle x_i, x_j \rangle$ bei Symmetrie $(x_i, x_j) = (x_j, x_i)$. Zur Vereinfachung schreibt man für eine Kante u zwischen den Knoten x_i und x_j : Kante u_{ij} . Die Länge einer Kante stellt sich als Funktion $f(u_{ij})$ dar. Die Anzahl der von einem Knoten ausgehenden Kanten bestimmen den Knotengrad. Alle Knoten, die durch Kanten direkt oder über weitere Knoten und Kanten miteinander verbunden sind, bilden eine Komponente eines Graphen. Die Zahl der möglichen Graphen ist die Mächtigkeit der betreffenden Graphfamilie.

Bei einer Rundreise handelt es sich also um einen 1-komponentigen Graphen, bestehend aus n Knoten mit einem Knotengrad 2 und aus n Kanten. Die Mächtigkeit der Graphfamilie ist $n!$.

1.3 Ergänzende Erläuterungen

Für alle Lösungen des TSP gilt, dass andere Merkmale keinen Einfluss auf die Ausprägung haben. Daraus ergibt sich implizit, dass der Startpunkt einer Rundreise frei gewählt werden kann und je n Lösungen zu einer einzigen Lösung zusammenfallen, so dass die Mächtigkeit der Graphfamilie zu $(n-1)!$ wird.

Des Weiteren wird beim TSP davon ausgegangen, dass $f(u_{ij}) = f(u_{ji})$ ist, d.h., dass Symmetrie besteht. Wenn diese Bedingung auch in sehr vielen Fällen erfüllt ist, so ist Symmetrie nicht zwingend. Herrscht Symmetrie, dann halbiert sich die Mächtigkeit der Graphfamilie zu $(n-1)! / 2$. Für den neuen Lösungsansatz ist Symmetrie grundsätzlich nicht zwingend, es gehen jedoch ohne Symmetrie Einsparungseffekte verloren. Die Länge einer Kante steht hier stellvertretend für jedes beliebige metrische Merkmal. Im allgemeinen verwendet man den Begriff der „Kosten“. Der Zahlenwert ist die Ausprägung des Merkmals.

2 Bisherige kombinatorische Lösungsansätze

2.1

Optimallösung durch vollständige Enumeration

Die Lösung des Rundreiseproblems aus mathematischer Sicht ist einfach: Man berechnet alle möglichen Rundreisen. Die Rundreise mit der kürzesten Entfernung ist die gesuchte Lösung. Die Schwierigkeit, die kürzeste Rundreise zu ermitteln, liegt nicht in der Berechnung der einzelnen Rundreise selbst, sondern daran, dass die Anzahl der Lösungen in Fakultät zu der Anzahl der aufzusuchenden n Orte ansteigt. Aufgrund der $(n-1)!$ Lösungen ist eine vollständige Enumeration nur für Rundreisen mit wenigen Orten möglich. Auch mit schnellsten Rechnern wird sich die Anzahl der Orte nicht wesentlich erhöhen lassen. Bei symmetrischen Rundreisen verringert sich zwar die Anzahl der Lösungen auf die Hälfte, weil jede Rundreise auch entgegengesetzt durchgeführt werden kann. Am Problem selbst ändert sich dadurch jedoch wenig, zumal oft die Symmetrie nicht genutzt wird, und so doch wieder alle Rundreisen berücksichtigt werden müssen.

2.2

Optimallösung durch begrenzte Enumeration

Ein möglicher Weg, bei einer größeren Anzahl von Orten zu Optimallösungen zu gelangen, ist die begrenzte Enumeration. Dabei wird beim Berechnen einer Rundreise das Ergebnis jedes Zwischenschrittes mit der bereits früher gefundenen Minimallösung einer Rundreise verglichen. Ist das Ergebnis des Zwischenschrittes größer als die Minimallösung, so wird die Berechnung der Rundreise abgebrochen, weil kein besseres Ergebnis mehr zu erzielen ist (Backtracking).

Des Weiteren gibt es andere kombinatorische Verfahren, Optimallösungen zu erhalten. Bei allen Lösungen allgemeiner Art bleibt jedoch die Anzahl der aufzusuchenden Orte sehr begrenzt (s.auch 3.5 - Eine Klassifizierung von optimalen TSP-Lösungen)..

2.3

suboptimale Lösungen

Neben diesen o.a. Verfahren sind eine Vielzahl von sehr leistungsfähigen Verfahren entwickelt worden, die zwar nur zu suboptimalen Lösungen führen, die aber den Anforderungen der Praxis völlig genügen.

Soweit erkennbar liegt das wissenschaftliche Interesse seit langem in der Entwicklung und Verbesserung solcher suboptimalen Lösungen, weil scheinbar optimale kombinatorische Lösungen für allgemeine TSP erschöpfend erforscht sind.

3 Neuer kombinatorischer Lösungsansatz

Hat man aufgrund der Rundreise fast immer eine räumliche Vorstellung des Problems, so liegt hier doch für den allgemeinen Fall eine algebraische Aufgabe vor, nämlich die Ermittlung einer Summe aus den gewichteten Kanten.

3.1 Hauptansatz

Der Hauptansatz der ZIP-Methode besteht darin, jeden Graphen so in zwei gleichstrukturierte Teilgraphen zu zerlegen, dass ein Teilgraph nur jede zweite Kante des Graphen enthält. Jede Kante im Teilgraphen ist von allen anderen Kanten unabhängig und kann aufgrund der durch die Zerlegung gewonnenen „Freiheiten“ an beliebiger Stelle und bei Symmetrie außerdem in beliebiger Richtung angeordnet sein, ohne dass sich die Summe aus den gewichteten Kanten ändert. Legt man nun beim Teilgraphen eine bestimmte Reihenfolge der Kanten und außerdem bei jeder Kante eine bestimmte Reihenfolge des Anfangs- und Endknoten fest, dann kann jeder Graph so in zwei Teilgraphen zerlegt werden, dass sich jeder der beiden Teilgraphen auf die festgelegte Struktur zurückführen lässt. Daraus folgt, dass nur diejenigen Teilgraphen, die dieser Struktur entsprechen, berechnet werden müssen. Alle übrigen bleiben unberücksichtigt. **Die Anzahl aller möglichen Teilgraphen wird dadurch minimal im Vergleich zur Anzahl aller möglichen Graphen.**

Die Zerlegung hat somit eine quantitative Auswirkung hinsichtlich der minimalen Anzahl der Teilgraphen und gleichzeitig eine qualitative Auswirkung hinsichtlich der Kantenreihenfolge innerhalb der Teilgraphen.

Bemerkungen:

1. Damit ein Graph in zwei gleichstrukturierte Teilgraphen zerlegt werden kann, muss die Anzahl der Knoten gradzahlig sein; ggf. ist ein Pseudoknoten einzufügen (s. auch Anmerkungen zum Pseudoknoten).
2. Die Frage der Kurzzyklen stellt sich nicht bei der Berechnung der Teilgraphen, sondern erst beim Zusammensetzen zweier Teilgraphen zu einem Graphen.
3. Zur besseren Unterscheidung von Graph und Teilgraph wird hier wahlweise für den Graph auch die Bezeichnung „Gesamtgraph“ gewählt.
4. Üblicherweise ordnet man die Kanten in der "natürlichen" Reihenfolge der Knotenbezeichnungen an; d.h. die Kanten werden nach den Bezeichnungen des Anfangsknoten einer Kante sortiert, bei Symmetrie ist außerdem die Bezeichnung des Anfangsknotens kleiner als die des Endknotens einer Kante. Dabei ist es unerheblich, ob man als Bezeichnung der Knoten Buchstaben oder - wie der Autor - Zahlen verwendet. Durch die festgelegte Struktur werden bei den zu

berechnenden Teilgraphen die nominal-skalierten Bezeichnungen der Knoten zu ordinal-skalierten Bezeichnungen.

- In der Literatur findet man gelegentlich für den Teilgraphen auch die Bezeichnung "Untergraph". Ein Teilgraph enthält zwar nicht alle Kanten aber alle Knoten des Graphs. Im Gegensatz dazu enthält ein Untergraph nur einen Teil der Knoten eines Graphs. Der Autor hat deshalb die Bezeichnung "Teilgraph" gewählt.

3.2 Verfahrensbeschreibung

Der Lösungsansatz enthält bezogen auf die Ausprägung des interessierenden Merkmals sowohl zahlenwert-unabhängige wie auch zahlenwert-abhängige Regeln:

3.2.1 Zahlenwert-unabhängige Regeln

Unabhängig von den Ausprägungen des interessierenden Merkmals der Kanten werden auf jeden Graph folgende Regeln angewandt:

Zerlegungsregel:

Zerlegt man einen Graphen in zwei Teilgraphen, so dass jeder Knoten im Teilgraphen **nur einmal** entweder als Anfangsknoten oder als Endknoten einer Kante enthalten ist, dann entstehen zwei $(n/2)$ -komponentige Teilgraphen, bestehend aus je n Knoten mit einem Knoten-grad 1 und aus $n/2$ Kanten.

Reihenfolgeregel:

Weil aufgrund der o.a. Zerlegung jede Kante von allen übrigen Kanten losgelöst ist, lassen sich alle $n/2$ Kanten eines Teilgraphen so sortieren, dass die Nummer des Anfangsknoten x_i einer Kante $(u_{ij})_k$ kleiner ist als der Anfangsknoten x_i einer Folgekante $(u_{ij})_{k+1}$; $k = 1, 2, \dots, (n/2)-1$.

⇒ alle verschiedenen Reihenfolgen von $n/2$ Kanten fallen zu einer Reihenfolge, und damit zu einem einzigen Teilgraph zusammen.

Außer für die erste (feststehende) Kante mit dem Anfangsknoten x_1 vermindert sich für jede weitere der $n/2$ Kanten die Mächtigkeit der Teilgraphen um eine **Fakultät**.

Symmetrieregeln:

Weiter lassen sich bei Symmetrie alle Kanten u_{ij} so ordnen, dass bei der einzelnen Kante die Nummer des Anfangsknoten x_i kleiner ist als die Nummer des Endknoten x_j . $i < j$; $i = 1, 2, \dots, n-1$; $j = i+1, i+2, \dots, n$.

⇒ Bis auf die erste feste Kante, die vom Knoten x_1 ausgeht, fallen je zwei Kanten $(u_{ij}$ und $u_{ji})$ zu einer Kante u_{ij} zusammen.

Außer für die erste (feststehende) Kante mit dem Anfangsknoten x_1 vermindert sich für jede weitere der $n/2$ Kanten die Mächtigkeit der Teilgraphen um eine **2er-Potenz**.

3.2.2 Zahlenwert-abhängige Regeln

Beim Graph kann - bis auf die erste Kante mit dem Anfangsknoten Nr. 1 und die letzte Kante mit dem Endknoten Nr. 1 - jede andere Kante an jeder beliebigen Stelle innerhalb eines Graphen stehen. Im Gegensatz dazu bestimmt jedoch im Teilgraph die in 3.2.1. festgelegte Sortierung insoweit die Reihenfolge der Kanten, dass eine Kante nur an bestimmten Plätzen innerhalb eines Teilgraphen stehen kann. Jeder Teilgraph hat somit eine „Kanten“-Struktur, der Gesamtgraph hat keine.

Folgende Beziehung ergibt sich zwingend zwischen der Nummer des Anfangsknoten x_i einer Kante $(u_{ij})_k$ und dem k -ten Platz dieser Kante im Teilgraph; $k = 1, 2, \dots, (n/2)$; $i = k, \dots, 2k-1$:

Tabelle 3.1. Beziehung zwischen Kanten und Kantenplatz

1. Kante	2. Kante	3. Kante	4. Kante
$u_{(1,2)} - u_{(1,n)}$	$u_{(2,3)} - u_{(2,n)}$ oder	$u_{(3,4)} - u_{(3,n)}$ oder	$u_{(4,5)} - u_{(4,n)}$ oder
	$u_{(3,4)} - u_{(3,n)}$	$u_{(4,5)} - u_{(4,n)}$ oder	$u_{(5,6)} - u_{(5,n)}$ oder
		$u_{(5,6)} - u_{(5,n)}$	$u_{(6,7)} - u_{(6,n)}$ oder
			$u_{(7,8)} - u_{(7,n)}$

Die Platznummer k einer Kante im Teilgraph bestimmt die möglichen Anfangsknoten x_i dieser Kante; z.B. beginnen alle möglichen ersten Kanten eines Teilgraphen mit dem Knoten Nr. 1, alle möglichen zweiten Kanten eines Teilgraphen mit den Knoten Nr. 2 oder Nr. 3, alle dritten Kanten mit den Knoten Nr. 3 oder Nr. 4 oder Nr. 5, usw. .

Andererseits bestimmt die Nummer des Anfangsknoten einer Kante den möglichen Kantenplatz innerhalb der Reihenfolge der Kanten beim Teilgraph. Diese Beziehung zwischen Anfangsknoten einer Kante und dem Kantenplatz wird für die beiden folgenden Regeln ausgenutzt. Abhängig von den Ausprägungen des interessierenden Merkmals der Kanten werden auf jeden Teilgraph folgende Regeln angewandt:

Knotennummerierungsregel:

Ziel der Regel ist es, vor der eigentlichen Berechnung den größtmöglichen **variablen "Kostenanteil"** auf die vorderen Kantenplätze zu verteilen. Für die begrenzte Enumeration ist es günstig, wenn die Abweichungen der Kantenlängen auf den vorderen Plätzen in der Reihe eines Teilgraphen möglichst groß sind. Dadurch können Teilbereiche bei der Berechnung frühzeitig ausgeschieden werden. Als gute Grundlage für die Berechnung der Abweichung der Kantenlängen jedes Knoten scheint hier die Summe der Abweichungen aller Kantenlängen von der kleinsten Kantenlänge zu sein. Je größer der Wert der Abweichungen desto kleiner sollte die Nr. des Knoten sein. Die Einspareffekte sind abhängig von den Ausprägungen des entsprechenden Merkmals. Je größer die Abweichungen sind, desto größer sind die Einspareffekte.

Mindestkantenregel:

Das Ziel, bei der begrenzten Enumeration möglichst frühzeitig die Berechnung abbrechen zu können, wird dadurch verbessert, dass man nicht die Gesamtlänge der Kanten, sondern nur ihre Abweichungen, d.h. die Differenz von der kleinsten Kantenlänge betrachtet. Damit soll der **"Fixkostenanteil"** eliminiert werden. Üblicherweise wird dazu jeder

Zahlenwert der Ausgangsmatrix um die kleinste Kantenlänge der Kanten reduziert.

Will man die Ausgangsmatrix nicht verändern, kann man auch bei jedem Zwischenergebnis für die noch ausstehenden Kanten jeweils die Mindestlänge hinzuzählen und erst dann das Ergebnis mit dem bereits früher gefundenen kleinsten Teilgraph vergleichen. Ist das Ergebnis größer als dieser Teilgraph, dann kann an dieser Stelle die Berechnung abgebrochen werden. Aufgrund der vorgegebenen Ordnung wird diese Mindestkantenlänge für jeden einzelnen Platz jetzt nicht mehr aus allen Kanten sondern nur noch aus der Menge der relevanten Kanten des jeweiligen Platzes gesucht. Für jeden Kantenplatz ist die Gesamt-Mindestlänge aller noch ausstehenden Kanten zu berechnen. Die exakte Mindestlängen lassen sich i.d.R. nur maschinell berechnen.

Bemerkung:

Die bisherigen Kanten u_1, u_2, \dots im Teilgraph bestimmen die Nummer des Anfangsknoten der Folgekante insoweit, als die Folgekante nicht mit einem beliebigen sondern zwingend mit dem kleinsten Anfangsknoten beginnt, der bei den vorherigen Kanten weder Anfangs- noch Endknoten war. Deshalb hat z.B. der Anfangsknoten der dritten Kante entweder die Nr. 3 oder die Nr. 4 oder die Nr. 5, abhängig davon, welcher dieser Knoten bereits in der ersten bzw. zweiten Kante enthalten ist. (siehe o.a. Tabelle). Kanten mit einer kleinen Anfangsknoten-Nummer stehen also tendenziell vorn in der Reihe der Kanten eines Teilgraphen, Kanten mit einer großen Anfangsknoten-Nummer tendenziell hinten. Aus $i < n$ folgt, dass der Knoten mit der Nr. n nie Anfangsknoten einer Kante sondern nur Endknoten sein kann.

3.2.3 Iterationsschritte

Die fehlenden Kanten zum Gesamtgraph ergeben einen Komplement-Teilgraph (TG_{kompl}) mit derselben Struktur wie der ursprüngliche Teilgraph. Zu suchen ist nun die minimale Gesamtsumme⁴, die aus den beiden Teilsommen gebildet wird. Dazu wird in einem ersten Iterationsschritt der Teilgraph mit der kleinsten Summe und sein zugehöriger kleinster Komplement-Teilgraph ermittelt. Die Summe beider Teilsommen muss nicht zwingend die kleinste Gesamtsumme sein. Alle Teilgraphen, deren Summe größer ist als die Summe des gefundenen kleinsten Komplement-Teilgraphen, scheidet für die folgenden Berechnungen aus, weil sie nicht Bestandteil des optimalen Gesamtgraphen sein können. Weiter ist die Summe zweier Summanden nur dann kleiner als ein vorgegebener Wert, wenn mindestens einer der beiden Summanden kleiner ist als die Hälfte dieses Wertes. Gibt es also einen Teilgraph, dessen Summe kleiner ist als die Hälfte der bereits ermittelten Gesamtsumme, so ist zu diesem Teilgraph wiederum der kleinste Komplement-Teilgraph zu suchen, um festzustellen, ob die neue Gesamtsumme kleiner als die bisherige ist. Die neue kleinere Gesamtsumme ist Ausgangswert für den nächsten Iterationsschritt.

Dieses Verfahren ist so oft durchzuführen, bis feststeht, dass es keinen kleineren Teilgraph mit zugehörigem Komplement-Teilgraph gibt. Abhängig von den jeweiligen Werten der Kantenlängen wird zwar beim ersten Durchgang nicht zwingend der optimale Graph gefunden, die Zahl der notwendigen Durchgänge bleibt jedoch erfahrungsgemäß (s.u.) minimal.

⁴ Mit „Summe“ ist hier die Summe der Ausprägungen des interessierenden Merkmals gemeint.

3.3 Mächtigkeiten

$$\text{Mächtigkeit der Graphfamilie (bei gerichteten Kanten)} = (n-1)! \quad (1)$$

$$\text{Mächtigkeit der Graphfamilie (bei Symmetrie)} = (n-1)! / 2 \quad (2)$$

$$\text{Mächtigkeit der Teilgraphfamilie (bei gerichteten Kanten)} = 2(n-1)! / (n/2-1)! \cdot 1 \quad (3)$$

$$\text{Mächtigkeit der Teilgraphfamilie (bei Symmetrie)} = (n-1)! / (n/2-1)! \cdot 2^{(n/2-1)} \quad (4)$$

$$\text{Mächtigkeit der Komplement-Teilgraphfamilie für jeden einzelnen Teilgraph (bei gerichteten Kanten)} = (n/2-1)! \cdot 1 \quad (5)$$

$$\text{Mächtigkeit der Komplement-Teilgraphfamilie für jeden einzelnen Teilgraph (bei Symmetrie)} = (n/2-1)! \cdot 2^{(n/2-1)} \quad (6)$$

Teilgraph und Komplement-Teilgraph gehören derselben Teilgraphenfamilie an, die um Größenordnungen kleiner sind als die Mächtigkeit der Graphfamilie. Im Vergleich zu diesem Vorteil ist die Anzahl der Berechnung der Teilgraphen für alle Iterationsschritte minimal.

Bemerkung:

Jeder Teilgraph ist auch Komplement zu allen seinen Komplement-Teilgraphen.

Mit Zunahme der Knoten wächst auch bei der Teilgraphfamilie die Mächtigkeit mit $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (n-1)$, so dass auch hier eine Grenze erreicht wird, bei der eine Optimallösung nicht mehr berechenbar ist. Ohne Qualitätsverlust muss durch die Zerlegung jedoch nur ein Bruchteil der Graphen berechnet werden. Dies gilt selbst bei gerichteten Graphen.

Die Grenze der Berechenbarkeit kann ggf. abhängig von den Ausprägungen des interessierenden Merkmals nach oben verschoben werden. Nach vorsichtiger Schätzung kann man davon ausgehen, dass abhängig von den konkreten Kantenlängen ein optimaler Gesamtgraph dann gefunden wird, wenn es möglich ist, den kleinsten Teilgraphen zu bestimmen.

3.4 Zusammenfassung des neuen Lösungsansatzes

Aufgrund der Zerlegung jedes Gesamtgraphen in zwei gleichstrukturierte Teilgraphen erhält jede weitere Kante einen **Freiheitsgrad** hinsichtlich ihres Platzes im Teilgraphen. Weil jede Berechnung mit dem Knoten Nr. 1 beginnt, ist die Zahl der Freiheitsgrade um 1 kleiner als die Zahl der Kanten. Liegt Symmetrie vor, so gewinnt man für jede (bis auf die erste) Kante zusätzlich einen Freiheitsgrad hinsichtlich ihrer Richtung. Diese gewonnenen Freiheiten ermöglichen es, alle Gesamtgraphen auf ein vergleichsweises Minimum von Teilgraphen zurückzuführen.

Der Preis für die Zerlegung ist die später notwendige Zusammenführung zweier Teilgraphen wieder zu einem Gesamtgraphen. Dieser Aufwand ist jedoch minimal im Vergleich zum Gewinn, der durch die kürzeren Berechnungen der Teilgraphen erzielt wird.

Dabei kommen zu der minimalen Anzahl von Teilgraphen zwei weitere Besonderheiten den Berechnungen entgegen:

1.

Zum einen hat die Häufigkeitsverteilung der Zahlenwerte aller Teilgraphen (wie auch bei den Gesamtgraphen) in etwa die Form einer Normalverteilung, so dass an dem hier interessierenden unteren Rand der Verteilung nur vergleichsweise wenige Teilgraphen vorhanden sind.

2.

Als weitere Besonderheit kann man die triviale Tatsache ausnutzen, dass bei zwei Summanden der Wert des kleineren Summanden maximal die Hälfte der Summe beider Summanden erreichen kann. Ausgehend vom bereits errechneten kleinsten Gesamtgraphen kann man also die Berechnung der Teilgraphen auf diejenigen Teilgraphen beschränken, deren Zahlenwert höchstens die Hälfte des kleinsten bereits gefundenen Gesamtgraphen erreicht.

Weiter kann die Rechenzeit durch geschickte Nummerierung der Knoten und durch die in der einer oder anderen Form bekannte Verminderung der Kanten um einen Fixbetrag zusätzlich verkürzt werden.

Die eigentliche Besonderheit der ZIP-Methode liegt aber in der Reduzierung der Zahl aller Gesamtgraphen auf eine minimale Zahl von Teilgraphen. Die ZIP-Methode ersetzt nicht unbedingt andere Verfahren, sondern kann mit diesen kombiniert bzw. ihnen ggf. vorgeschaltet werden.

3.5 Eine Klassifizierung von optimalen TSP-Lösungen

Die Hauptschwierigkeit des Traveling Salesman Problem liegt nicht in der Berechnung der einzelnen Graphen, sondern in der mit Zunahme der Knoten um ganze Fakultäten wachsenden Anzahl der möglichen Graphen. In der Praxis sind leistungsfähige, suboptimale Lösungen, die möglichst nahe dem Optimum liegen, häufig ausreichend. Hingegen laufen Optimallösungen auf eine vollständige Analyse der $n!$ möglichen Graphen hinaus.

Ohne Eingrenzung:

Daraus folgt, dass eine vollständige Enumeration nur für eine kleine Anzahl von Knoten möglich ist. Dabei ist es unerheblich, ob diese Grenze nun bei 15 Knoten oder erst bei 20 Knoten liegt oder noch weiter hinausgeschoben werden kann. Die Anzahl bleibt immer klein.

Eingrenzung über die Summe:

Oft kann man aber schon im Laufe der Berechnung einzelner Graphen anhand der erreichten Summe der Kantenwerte feststellen, dass ein Optimum nicht mehr gefunden werden kann, so dass man die Berechnung abbricht, einen oder mehrere Schritte zurückgeht und dann erst weiterrechnet (Backtracking). Die bekannteste Verfahrensweise ist die der sog. begrenzten Enumeration. Die Anzahl möglicher Knoten für die Berechnung optimaler Graphen erhöht sich zwar, die Grenze ist aber auch hier bald erreicht. Schon gar nicht ist die begrenzte Enumeration eine generelle Lösung für optimale TSP.

Eingrenzung über den Ausschluss von Kanten:

Eine andere Möglichkeit, die Menge der möglichen Graphen einzuschränken, besteht darin, einzelne Kanten für eine optimale Lösung auszuschließen. Als Beispiel sei hier "Branch-and-Bound" genannt. Mit dieser Methode werden wesentlich bessere Ergebnisse erzielt als mit der begrenzten Enumeration. Der "Branch-and-Cut"-Algorithmus, mit dem man das bisher größte TSP optimal berechnet hat (Weltrekord), baut auf der Methode von Branch-and-Bound auf.

Eingrenzung über Nebenbedingungen:

Einer der häufigsten Einschränkungen über Nebenbedingungen ist der Spezialfall des TSP im euklidischen Raum. Hier können von vornherein bestimmte Kanten aufgrund ihrer Lage ausgeschlossen werden. Neben Kanten, die im Graph zu Überschneidungen des Weges führen, gehören z.B. alle diejenigen Kanten mit Sicherheit nicht zum optimalen Graph, die Knoten auf der konvexen Hülle verbinden, soweit jene nicht benachbart sind.

Eingrenzung über die Reduzierung der Ausgangsmenge:

Die ZIP-Methode geht einen anderen Weg. Durch die Zerlegung der Gesamtgraphen in zwei gleichstrukturierte Teilgraphen erreicht man eine Minimierung der Ausgangsmenge von Elementen. Können bekannte Lösungen nicht nur auf Gesamtgraphen sondern auch auf Teilgraphen angewandt werden, so bringt die ZIP-Methode den entscheidenden Quantensprung der rechentechnischen Vereinfachung.

4 Beispiele

Im ersten Beispiel mit 6 Knoten wird neben der Zerlegung der Graphen in zwei Teilgraphen die Struktur dieser Teilgraphen und anschließend die Zusammenführung der Teilgraphen wieder zu einem Gesamtgraphen erläutert.

Im zweiten Beispiel mit 10 Knoten werden die Iterationsschritte vom kleinsten Teilgraphen bis zum optimalen Gesamtgraphen durchgeführt. Außerdem wird die Häufigkeitsverteilung der Kantensummen und die Beziehung zwischen Kante und Kantenplatz innerhalb der Teilgraphen dargestellt.

Im dritten Beispiel mit 26 Knoten wird zum ersten Mal die bisherige Grenze der optimalen kombinatorischen Berechnung überschritten. Nach Anwendung der Knotennummerierungsregel und der Mindestkantenregel werden die Ergebnisse der eigentlichen Berechnung vorgestellt.

Die drei Beispiele sind, um sie gut nachvollziehen zu können, bewusst sehr breit dargestellt. Das kann u.U. dazu führen, dass der Blick auf den Kern der ZIP-Methode, die Minimierung der Ausgangsdaten, durch die vorgestellten möglichen Verbesserungen verstellt wird.

Wichtiger Hinweis:

Die Teilgraphen können mit jedem (bekanntem) Verfahren berechnet werden, soweit diese nicht aus systematischen Gründen der ZIP-Methode widersprechen. Der Autor benutzt für die Erläuterung der ZIP-Methode in den ersten beiden Beispielen die Voll-Enumeration, im letzten Beispiel die begrenzte Enumeration. Das ist aber nicht zwingend. Insbesondere müssen keineswegs alle Teilgraphen bekannt bzw. berechnet werden. **Entscheidend ist die Zerlegung der Graphen in zwei gleichstrukturierte Teilgraphen, nicht die hier verwendete Enumeration.**

4.1 Beispiel mit 6 Knoten

Gegeben seien 6 Knoten mit den zugehörigen Entfernungen (interessierende Ausprägung):

Tabelle 4.1. Ausgangsmatrix des Beispiels 4.1

	nach 1	nach 2	nach 3	nach 4	nach 5	nach 6
von 1	-	12	25	30	28	22
von 2		-	16	20	22	10
von 3			-	23	26	21
von 4				-	31	18
von 5					-	14
von 6						-

Die Zahl der möglichen Graphen beträgt $6! = 720$, wenn ein Graph von jedem Knoten beginnen kann. Beginnen alle Graphen nur vom Knoten Nr.1, so reduziert sich die Anzahl auf $5! = 120$. Bei Symmetrie beträgt die Anzahl nur 60.

Jeder mögliche symmetrische Gesamtgraph, auch wenn er nicht vom Knoten Nr. 1 beginnt, läßt sich bei Anwendung der in 3.2.1 genannten Regeln in zwei der folgenden Teilgraphen zerlegen:

Tabelle 4.2. Liste aller Teilgraphen mit 3 Kanten und 6 Knoten ⁵

Nr.	1. Kante	2. Kante	3. Kante	Summe der Kantenlängen	Bemerkung
1.	1 - 2	3 - 4	5 - 6	$12 + 23 + 14 = 49$	TG_(min)
2.	1 - 2	3 - 5	4 - 6	$12 + 26 + 18 = 56$	-
3.	1 - 2	3 - 6	4 - 5	$12 + 21 + 31 = 64$	-
4.	1 - 3	2 - 4	5 - 6	$25 + 20 + 14 = 59$	-
5.	1 - 3	2 - 5	4 - 6	$25 + 22 + 18 = 65$	<i>Komp-TG</i>
6.	1 - 3	2 - 6	4 - 5	$25 + 10 + 31 = 66$	<i>Komp-TG</i>
7.	1 - 4	2 - 3	5 - 6	$30 + 16 + 14 = 60$	-
8.	1 - 4	2 - 5	3 - 6	$30 + 22 + 21 = 73$	<i>Komp-TG</i>
9.	1 - 4	2 - 6	3 - 5	$30 + 10 + 26 = 66$	<i>Komp-TG</i>
10.	1 - 5	2 - 3	4 - 6	$28 + 16 + 18 = 62$	Komp-TG_(min)
11.	1 - 5	2 - 4	3 - 6	$28 + 20 + 21 = 69$	<i>Komp-TG</i>
12.	1 - 5	2 - 6	3 - 4	$28 + 10 + 23 = 61$	-
13.	1 - 6	2 - 3	4 - 5	$22 + 16 + 31 = 69$	<i>Komp-TG</i>
14.	1 - 6	2 - 4	3 - 5	$22 + 20 + 26 = 68$	<i>Komp-TG</i>
15.	1 - 6	2 - 5	3 - 4	$22 + 22 + 23 = 67$	-

Zu jedem der 15 Teilgraphen gibt es aus den übrigen 14 Teilgraphen insgesamt 8 Komplement-Teilgraphen, die zusammen einen Gesamtgraphen bilden. Die restlichen 6 Teilgraphen scheiden aus, weil sie je eine

⁵ Aus Vereinfachungsgründen wird für eine Kante als Schreibweise statt $u_{(ij)}$ nur i-j angegeben. Beispiel: Kante mit dem Anfangsknoten Nr. 3 und dem Endknoten Nr. 7 = Kante $u_{(3,7)} \equiv 3-7$.

Kante des ursprünglichen Teilgraphen enthalten. Weil jeder Teilgraph wiederum Komplement-Teilgraph zu allen seinen eigenen Komplement-Teilgraphen ist, ergeben sich aus 15×8 Teilgraphen 120 Gesamtgraphen, wobei wegen der Symmetrie je zwei Gesamtgraphen doppelt sind.

Im Beispiel ist bei dem 1. Teilgraphen die Summe der Kantenlängen minimal. Komplement-Teilgraphen sind die Nr. 5, Nr.6, Nr.8, Nr.9, Nr.10, Nr.11, Nr.13 und Nr.14. Beim Komplement-Teilgraphen Nr.10 ist die Summe der Kantenlängen minimal, so dass der Teilgraph Nr.1 und der Teilgraph Nr.10 mit der Gesamtsumme aller Kantenlängen $49 + 62 = 111$ und den Kanten 1-2, 3-4, 5-6 sowie den Kanten 1-5, 2-3 und 4-6 den kleinste Gesamtgraph bilden:

$$f(1-2) + f(2-3) + f(3-4) + f(4-6) + f(6-5) + f(5-1) = 111.$$

Für die Prüfung, ob ein weiterer Iterationsschritt (siehe 3.2.3) erforderlich wird, muss nur geprüft werden, ob es einen Teilgraphen mit einer Kantenlänge von weniger als die Hälfte von $111 = 55$ gibt. Dies ist nicht der Fall. Somit ist bereits im ersten Iterationsschritt der optimal kleinste Gesamtgraph gefunden.

1. Bemerkung:

Weil für die Aufsummierung der Kantenlängen die Reihenfolge der Kanten unerheblich ist und außerdem bei Symmetrie die Kantenlängen von je zwei Kanten identisch sind, muss für die folgenden Teilgraphen (mit fester Kante 1-2)

Tabelle 4.3. Variationen der zweiten und dritten Kante eines Teilgraphs

Nr.	1. Kante	2. Kante	3. Kante	Summe der Kantenlängen
1	1 - 2	3 - 4	5 - 6	$12 + 23 + 14 = 49$
2	1 - 2	3 - 4	6 - 5	$12 + 23 + 14 = 49$
3	1 - 2	4 - 3	5 - 6	$12 + 23 + 14 = 49$
4	1 - 2	4 - 3	6 - 5	$12 + 23 + 14 = 49$
5	1 - 2	5 - 6	3 - 4	$12 + 14 + 23 = 49$
6	1 - 2	5 - 6	4 - 3	$12 + 14 + 23 = 49$
7	1 - 2	6 - 5	3 - 4	$12 + 14 + 23 = 49$
8	1 - 2	6 - 5	4 - 3	$12 + 14 + 23 = 49$

nur ein Teilgraph (bei natürlicher Reihenfolge nur der erste)

$$1 \quad \vdots \quad 1-2 \quad \vdots \quad 3-4 \quad \vdots \quad 5-6 \quad \vdots \quad 12 + 23 + 14 = 49$$

berechnet werden. Hier ist der Anfangsknoten der 1.Kante im Teilgraph die Nr.1. Ist der Anfangsknoten der 1.Kante beliebig, so lassen sich nicht nur die 8 Teilgraphen sondern insgesamt 48 Teilgraphen zu einem einzigen Teilgraphen zurückführen.

2. Bemerkung:

Jede Kante eines Teilgraphen ist unabhängig von einer anderen Kante des Teilgraphen. Erst die Zusammenführung vom Teilgraphen mit einem seiner Komplement-Teilgraphen zu einem Gesamtgraphen bestimmt die Reihenfolge und die Richtung jeder Kante:

Tabelle 4.4. Zusammenführung der Teilgraphen zu Gesamtgraphen

Teilgraphen	Kanten des Gesamtgraphen	Σ Kantenlängen
Nr.1, Nr. 5	1-2, 2-5, 5-6, 6-4, 4-3, 3-1 = 1-2-5-6-4-3-1	49 + 65 = 114
Nr.1, Nr. 6	1-2, 2-6, 6-5, 5-4, 4-3, 3-1 = 1-2-6-5-4-3-1	49 + 66 = 115
Nr.1, Nr. 8	1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-4, 4-1 = 1-2-5-6-3-4-1	49 + 73 = 122
Nr.1, Nr. 9	1-2, 2-6, 6-5, 5-3, 3-4, 4-1 = 1-2-6-5-3-4-1	49 + 66 = 115
Nr.1, Nr.10	1-2, 2-3, 3-4, 4-6, 6-5, 5-1 = 1-2-3-4-6-5-1	49 + 62 = 111
Nr.1, Nr.11	1-2, 2-4, 4-3, 3-6, 6-5, 5-1 = 1-2-4-3-6-5-1	49 + 69 = 118
Nr.1, Nr.13	1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-1 = 1-2-3-4-5-6-1	49 + 69 = 118
Nr.1, Nr.14	1-2, 2-4, 4-3, 3-5, 5-6, 6-1 = 1-2-4-3-5-6-1	49 + 68 = 117

Durch Umkehrung der Richtung und der Reihenfolge der Kanten ergibt sich der zugehörige symmetrische Gesamtgraph.

4.2 Beispiel mit 10 Knoten

Tabelle 4.5. Ausgangsmatrix des Beispiels 4.2

von\ nach:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
von 1	-	16	44	93	1	30	30	5	78	42
von 2		-	68	61	42	77	41	79	22	32
von 3			-	39	48	21	36	28	40	80
von 4				-	43	8	66	46	30	35
von 5					-	67	69	11	84	91
von 6						-	97	43	63	67
von 7							-	85	89	18
von 8								-	2	85
von 9									-	5

Bei Anwendung der in 3.2.1. genannten Zerlegungs-, Reihenfolge- und Symmetrieregeln lassen sich die 181440 ($=362880/2$) symmetrischen Graphen in 945 Teilgraphen zerlegen. Diese geringe Anzahl von 945 Teilgraphen läßt sich ggf. auch ohne technische Hilfsmittel vollständig berechnen und dann nach der Summe der Kantenlängen (Ausprägung des Kantenmerkmals) sortieren:

Tabelle 4.6. Teilgraphen sortiert nach Summe der Kantenlängen (Auszug)⁶

lfd. Nr.	Σ Kantenlängen	1. Kante	2. Kante	3. Kante	4. Kante	5. Kante	Bemerkung
1	76	1-2	3-7	4-6	5-8	9-10	min. TG
2	77	1-5	2-9	3-8	4-6	7-10	
3	79	1-5	2-10	3-7	4-6	8-9	Optimum
4	83	1-5	2-7	3-8	4-6	9-10	
5	92	1-2	3-5	4-6	7-10	8-9	
6	93	1-2	3-9	4-6	5-8	7-10	
7	96	1-2	3-6	4-9	5-8	7-10	Optimum
8	96	1-8	2-5	3-7	4-6	9-10	
9	97	1-5	2-3	4-6	7-10	8-9	
10	100	1-2	3-6	4-5	7-10	8-9	
11	100	1-5	2-7	3-6	4-10	8-9	min. Kompl.-TG
12	101	1-8	2-9	3-5	4-6	7-10	
13	103	1-3	2-9	4-6	5-8	7-10	
14	103	1-5	2-4	3-6	7-10	8-9	
15	107	1-8	2-7	3-5	4-6	9-10	
16	108	1-5	2-9	3-6	4-8	7-10	
17	109	1-3	2-7	4-6	5-8	9-10	

⁶ Die ganze Tabelle findet man unter http://www.jochen-pleines.de/anmerkungen/tsp_s_10.htm

Tabelle 4.6. Fortsetzung

lfd. Nr.	Σ Kantenlängen	1. Kante	2. Kante	3. Kante	4. Kante	5. Kante	Bemerkung
18	109	1-8	2-9	3-6	4-5	7-10	
.....							
.....							
939	400	1-4	2-3	5-10	6-9	7-8	
940	400	1-4	2-8	3-9	5-10	6-7	
941	402	1-4	2-3	5-6	7-9	8-10	
942	408	1-4	2-8	3-10	5-6	7-9	
943	419	1-4	2-6	3-10	5-9	7-8	
944	427	1-4	2-3	5-9	6-7	8-10	
945	433	1-4	2-8	3-10	5-9	6-7	

Betrachtet man die Häufigkeitsverteilung der Kantensummen, so zeigen die Ausprägungen die Form einer Normalverteilung. Für die Berechnungen ist diese Tatsache besonders günstig, weil an den Rändern nur einige wenige Teilgraphen für Feststellung des optimalen Gesamtgraphen beteiligt sind. (s.a. Anmerkung: Häufigkeitsverteilung Graph / Teilgraph)

Tabelle 4.7. Häufigkeitsverteilung

	Summe der Kantenlängen	Anzahl der Teilgraphen
	61- 80	3
	81-100	8
	101-120	19
	121-140	20
	141-160	47
	161-180	73
In diesem Beispiel sind bei	181-200	95
der Ermittlung des optimalen	201-220	103
Graphen aus 181.440 Graphen	221-240	110
nach dem ersten Durchgang nur	241-260	120
noch die ersten 11 Teilgraphen	261-280	95
beteiligt.	281-300	97
	301-320	53
	321-340	46
	341-360	25
	361-380	18
	381-400	8
	401-420	3
	421-440	2

Erster Schritt:

Der kleinste Komplement-Teilgraph zum kleinsten Teilgraphen Nr.1 ist der Teilgraph Nr.11. Die Gesamtsumme beider Summen der Kantenlängen ist $76 + 100 = 176$. Alle übrigen 934 Teilgraphen von Nr. 12 ($\Sigma=101$) bis Nr. 945 ($\Sigma=433$) scheidet damit für die Feststellung des kleinsten Graphen aus.

Weitere Iterationsschritte:

In weiteren Iterationsschritten sind Graphen zu suchen, die den bisherigen Minimalwert von $\Sigma=176$ unterschreiten. Ein Graph kann ggf. dann eine kleinere Kantenlänge von $\Sigma=176$ haben, wenn Teilgraphen mit Kantenlängen von weniger als der Hälfte von $176 = 88$ existieren. Nur die Teilgraphen Nr.2 ($\Sigma=77$), Nr.3 ($\Sigma=79$) und Nr.4 ($\Sigma=83$) sind kleiner als $\Sigma=88$, so dass maximal drei weitere Iterationsschritte durchzuführen sind.

Zweiter Iterationsschritt:

Zum Teilgraphen Nr.2 mit einer Kantenlänge von $\Sigma=77$ können höchstens die Teilgraphen Nr.3 bis Nr.9 mit Kantenlängen von weniger als $\Sigma=99$ ($176-77$) Komplement-Teilgraphen sein. Weil alle Teilgraphen Kanten des Teilgraphen Nr. 2 enthalten, scheidet der Teilgraph Nr. 2 für die Lösung aus.

Dritter Iterationsschritt:

Der Teilgraph Nr. 3 mit einer Kantenlänge von $\Sigma=79$ bildet mit dem Teilgraphen Nr.7 mit $\Sigma=96$ einen Graphen, dessen Gesamtkantenlänge nur $\Sigma=175$ beträgt. Sie ist neuer Ausgangswert.

Vierter und letzter Iterationsschritt:

Zum Teilgraphen Nr.4 ($\Sigma=83$) kann ggf. nur der Teilgraph Nr.5 ($175 - 83 = 92$) Komplement-Teilgraph sein. In beiden Teilgraphen ist jedoch die Kante 4-6 enthalten, so dass beide zusammen keinen Graphen bilden können.

Ergebnis:

Nachdem alle relevanten Teilgraphen überprüft wurden, ist der optimale Graph mit $\Sigma=175$, bestehend aus den Teilgraphen Nr.3 ($\Sigma=79$) und Nr.7 ($\Sigma=96$) gefunden. Für Graphen mit nur 10 Knoten ist eine Kantenminimierung und ggf. Umnummerierung der Knoten nicht erforderlich.

Bemerkung:

Jede Kante kommt in den Teilgraphen gleich häufig (genau 105-mal) vor. Mit zunehmender Knoten-Nummer verringert sich die Zahl der von diesem Knoten ausgehenden Kanten. Z.B. gehen vom Knoten Nr. 1 die Kanten 1-2 bis 1-10 (= 9 Kanten), vom Knoten Nr.2 die Kanten 2-3 bis 2-10 (= 8 Kanten) und vom Knoten Nr. 3 die Kanten 3-4 bis 3-10 (= 7 Kanten), usw. aus.

Die Beziehung zwischen Anfangsknoten einer Kante und Kantenplatz sowie die Anzahl der Kanten je Kantenplatz zeigt die folgende Übersicht:

Tabelle 4.8. Beziehung der Kanten zum Kantenplatz

Anfangs- knoten	1. Kante	2. Kante	3. Kante	4. Kante	5. Kante	Σ (je Anfangs- Knoten)
Nr. 1	945	-	-	-	-	945
Nr. 2	-	840	-	-	-	840
Nr. 3	-	105	630	-	-	735
Nr. 4	-	-	270	360	-	630
Nr. 5	-	-	45	360	120	525
Nr. 6	-	-	-	180	240	420
Nr. 7	-	-	-	45	270	315
Nr. 8	-	-	-	-	210	210
Nr. 9	-	-	-	-	105	105
Nr.10	-	-	-	-	-	0
Σ der Kanten	945	945	945	945	945	

Jeder Knoten kann entweder als Anfangsknoten oder als Endknoten einer Kante im Teilgraphen auftreten, insgesamt also immer 945-mal. Als Anfangsknoten tritt der Knoten Nr. 1 in jeder ersten Kante der 945 Teilgraphen auf, als Endknoten tritt er nie auf. Der folgende Knoten Nr. 2 tritt als Anfangsknoten nur noch in 840 von 945 Teilgraphen auf und 105 Mal als Endknoten, usw.. Schließlich tritt der Knoten Nr. 10 als Anfangsknoten nie auf, dafür in jedem der 945 Teilgraphen als Endknoten.

4.3 Beispiel mit 26 Knoten (Weihnachtsrätsel)

Das Institut für Rechnergestützte Wissensverarbeitung (KBS) der Universität Hannover hat 1996 als „Weihnachtsrätsel“ die Aufgabe gestellt, für 26 europäische Hauptstädte die kürzeste Rundreise zu finden. Die Aufgabe mit Lösungen wurden in das Internet gestellt. Die Entfernungsmatrix ist am Ende des Beispiels abgedruckt, weil inzwischen die Internet-Seiten entfernt wurden. Heuristisch wurde als kleinste Rundreise eine Rundreise von 16.189 km ermittelt, ohne den Nachweis, ob es sich hierbei um die optimal kürzeste Rundreise handelt. **Mit der neuen algebraischen Lösungsmethode kann nachgewiesen werden, dass diese heuristisch gefundene kleinste Rundreise von 16189 km auch die optimale Rundreise ist.**

Neuer algebraischer Lösungsweg:

Vor der Berechnung wurden die Daten manuell nach 3.2.2. optimal aufbereitet. Ziel ist es, bei der begrenzten Enumeration möglichst frühzeitig irrelevante Teilgraphen ausscheiden zu können. Folgende Einsparungseffekte werden durch einen Abbruch nach der entsprechenden Kante erzielt:

Tabelle 4.9. Einsparungen bei Abbruch

Anzahl aller Gesamtgraphen (=25!) :	15.511.210.043.330.985.984.000.000
Anzahl der symmetrischen Gesamtgraphen :	7.755.605.021.665.492.992.000.000
Anzahl aller Teilgraphen :	7.905.853.580.625
Einsparung bei Abbruch nach der 1.Kante :	316.234.143.225
nach der 2.Kante :	13.749.310.575
nach der 3.Kante :	654.729.075
nach der 4.Kante :	34.459.425
nach der 5.Kante :	2.027.025
nach der 6.Kante :	135.135
nach der 7.Kante :	10.395
nach der 8.Kante :	945
nach der 9.Kante :	105
nach der 10.Kante :	15
nach der 11.Kante :	3
nach der 12.Kante :	1
nach der 13.Kante :	0

Es lohnt sich also, möglichst frühzeitig die Berechnung abbrechen zu können.

Drei Größen beeinflussen günstig das Backtracking:

1. ein vorher heuristisch gefundener möglichst kleiner Ausgangswert,
2. eine für das Verfahren sinnvolle Nummerierung der Knoten und
3. die noch ausstehenden Kantenlängen je Kantenplatz.

Zu 1 (Ausgangswert).

Der kleinste heuristisch gefundene Gesamtgraph betrug 16.189 km und setzte sich aus den beiden Teilgraphen von 7331 km und 8858 km zusammen. Wie sich später herausgestellt hat, war diese Vorgabe sehr günstig, jedoch nicht zwingend notwendig. Bereits der kleinste Teilgraph (6845 km) mit seinem kleinsten Komplement-Teilgraphen (9912 km) ergeben schon einen Gesamtgraphen von nur 16.757 km.

Zu 2 (Knotennummerierungsregel):

Gerade in diesem Beispiel ist eine Knoten-Nummerierung in alphabetischer Reihenfolge der Städtenamen schon wegen der zentralen Lage von Amsterdam als ersten Knoten ungünstig, weil die Abweichungen der Kanten dieses Knoten im Vergleich zu den Abweichungen der Kanten anderer Knoten relativ gering sind. Es wurde deshalb eine Knoten-Umnummerierung absteigend nach der Größe der Abweichung aller Kantenlängen je Knoten vorgenommen. Diese Umnummerierung erzielt gute Ergebnisse, ist aber nicht zwingend. Es können auch andere Methoden angewandt werden.

Tabelle 4.10. Knoten-Umnummerierung

alter Knoten	Kn.-Nr.	neuer Knoten	relevante Kanten	min. Kantenlänge
Amsterdam	1	Lissabon	1-2 bis 1-26	1 - 3 ⇒ 639
Athen	2	Helsinki	2-3 bis 2-26	2 - 8 ⇒ 383
Barcelona	3	Madrid	3-4 bis 3-26	3 - 23 ⇒ 637
Belgrad	4	Istanbul	4-5 bis 4-26	4 - 7 ⇒ 577
Berlin	5	Athen	5-6 bis 5-26	5 - 7 ⇒ 847
Brüssel	6	Bucarest	6-7 bis 6-26	6 - 7 ⇒ 407
Bucarest	7	Sofia	7-8 bis 7-26	7 - 10 ⇒ 409
Budapest	8	Stockholm	8-9 bis 8-26	8 - 9 ⇒ 549
Frankfurt/M	9	Oslo	9-10 bis 9-26	9 - 12 ⇒ 588
Genf	10	Belgrad	10-11 bis 10-26	10-11 ⇒ 428
Helsinki	11	Budapest	11-12 bis 11-26	11-15 ⇒ 256
Istanbul	12	Kopenhagen	12-13 bis 12-26	12-16 ⇒ 367
Kopenhagen	13	Rom	13-14 bis 13-26	13-21 ⇒ 565
Lissabon	14	Warschau	14-15 bis 14-26	14-16 ⇒ 589
London	15	Wien	15-16 bis 15-26	15-20 ⇒ 312
Madrid	16	Berlin	16-17 bis 16-26	16-20 ⇒ 337
Mailand	17	Amsterdam	17-18 bis 17-26	17-19 ⇒ 220
Oslo	18	London	18-19 bis 18-26	18-19 ⇒ 371
Paris	19	Brüssel	19-20 bis 19-26	19-26 ⇒ 297
Prag	20	Prag	20-21 bis 20-26	20-25 ⇒ 504
Rom	21	Mailand	21-22 bis 21-26	21-22 ⇒ 305
Sofia	22	Zürich	22-23 bis 22-26	22-24 ⇒ 280
Stockholm	23	Barcelona	23-24 bis 23-26	23-24 ⇒ 772
Warschau	24	Genf	24-25 bis 24-26	24-26 ⇒ 517
Wien	25	Frankfurt/M	25-26	25-26 ⇒ 567
Zürich	26	Paris	-	-

Für die minimalen Kantenlängen der einzelnen Knoten ergibt sich von der kleinsten bis zur größten Länge diese Sortierung: 220, 256, 280, 297, 305, 312, 337, 367, 371, 383, 407, 409

Zu 3. (Mindestkantenregel):

Für jeden Kantenplatz ist die Gesamt-Mindestlänge aller noch ausstehenden Kanten zu berechnen. Die exakten Mindestlängen lassen sich in diesem Beispiel nur maschinell bestimmen. Gute Näherungswerte erhält man aber auch manuell unter Berücksichtigung der Minimalkanten.

Tabelle 4.12. Mindestkanten je Kantenplatz

Abziehender Wert beim	Σ	aus den noch offenen Kanten im Teilgraph (Kantenbezeichnung)											
		2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
1. Kantenplatz	5518	2-8	3-23	4-6	7-10	9-12	11-15	13-21	14-16	17-19	18-26	20-25	22-24
2. Kantenplatz	4869		3-23	4-6	7-10	8-9	11-15	12-16	14-20	17-19	18-26	21-24	22-25
3. Kantenplatz	4232			4-6	7-10	8-9	11-15	12-16	14-20	17-19	18-26	21-24	22-25
4. Kantenplatz	3464				6-7	8-9	10-11	12-16	15-20	17-19	18-26	21-24	22-25
5. Kantenplatz	2915					6-7	10-11	12-16	15-20	17-19	18-26	21-24	22-25
6. Kantenplatz	2403						7-10	11-15	16-20	17-19	18-26	21-24	22-25
7. Kantenplatz	1994							11-15	16-20	17-19	18-26	21-24	22-25
8. Kantenplatz	1542								11-15	16-20	17-19	18-26	22-24
9. Kantenplatz	1093									11-15	16-20	17-19	22-24
10. Kantenplatz	756										11-15	17-19	22-24
11. Kantenplatz	500											17-19	22-24
12. Kantenplatz	220												17-19

Programmierte Berechnungen beim Beispiel mit 26 Kanten:

Der heuristisch gefundene kleinste Gesamtgraph mit einer Kantenlänge von 16189 km setzt sich aus den beiden Teilgraphen mit einer Länge von 7331 km und 8858 km zusammen. Mittelwert der Kantenlängen ist 8094 km. Des weiteren wurde durch ein Programm der kleinste Teilgraph mit einer Kantenlänge von 6845 km berechnet. Die Länge des zugehörigen kleinsten Komplement-Teilgraphen beträgt 9912 km.

Zu ermitteln war jetzt, ob es einen kleineren Gesamtgraphen von weniger als 16189 km gibt. Bei diesem Gesamtgraph muss der kleinere Teilgraph zwingend eine Kantenlänge zwischen 6845 km und 8094 km haben. Hat keiner der Teilgraphen mit einer Kantenlänge bis zu 8094 km einen entsprechenden Komplement-Teilgraph, der mit diesem eine kleinere Gesamtkantenlänge von 16189 km bildet, so ist damit der optimale kleinste Gesamtgraph bereits gefunden.

Dazu wurden die Teilgraphen mit folgenden Kantenlängen gezählt

Tabelle 4.13. Ergebnisse des Beispiels 4.3

Kantenlänge	Anzahl der TG	Bemerkung
bis 6845 km	1	minimaler Teilgraph
bis 7331 km	40	Teilgraph des optimalen Graphen
bis 8094 km	2.725	$(7331 + 8858) : 2 = 8094$
bis 8858 km	57.200	Teilgraph des optimalen Graphen
bis 9344 km	293.380	$16189 - 6845 = 9344$
bis 9912 km	1.568.529	min.Komp-TG des minimalen TG
alle Teilgraphen	7.905.853.580.62	nicht berechnet
	5	

Nr.	Kante	K.- Länge	Nr.	Kante	K.- Länge
1 - 3	Lissabon - Madrid	639	1 -23	Lissabon - Barcelona	1276
3-13	Madrid - Rom	952	23-24	Barcelona - Genf	772
13-21	Rom - Mailand	565	24-26	Genf - Paris	517
21-22	Mailand - Zürich	305	26-18	Paris - London	449
22-25	Zürich - Frankfurt / M	415	18-19	London - Brüssel	371
25-20	Frankfurt / M - Prag	504	19-17	Brüssel - Amsterdam	220
20-15	Prag - Wien	312	17-16	Amsterdam - Berlin	669
15-11	Wien - Budapest	256	16-12	Berlin - Kopenhagen	367
11-10	Budapest - Belgrad	428	12- 9	Kopenhagen - Oslo	588
10- 7	Belgrad - Sofia	409	9 - 8	Oslo - Stockholm	549
7 - 5	Sofia - Athen	847	8 - 2	Stockholm - Helsinki	383
5 - 4	Athen - Istanbul	1141	2-14	Helsinki - Warschau	1130
4 - 6	Istanbul - Bucarest	638	14 - 6	Warschau - Bucarest	1487
6 -14	Bucarest - Warschau	1487	6 - 4	Bucarest - Istanbul	638
14- 2	Warschau - Helsinki	1130	4 - 5	Istanbul - Athen	1141
2 - 8	Helsinki - Stockholm	383	5 - 7	Athen - Sofia	847
8 - 9	Stockholm - Oslo	549	7 -10	Sofia - Belgrad	409
9 -12	Oslo - Kopenhagen	588	10-11	Belgrad - Budapest	428
12-16	Kopenhagen - Berlin	367	11-15	Budapest - Wien	256
16-17	Berlin - Amsterdam	669	15-20	Wien - Prag	312
17-19	Amsterdam - Brüssel	220	20-25	Prag - Frankfurt / M	504
19-18	Brüssel - London	371	25-22	Frankfurt / M - Zürich	415
18-26	London - Paris	449	22-21	Zürich - Mailand	305
26-24	Paris - Genf	517	21-13	Mailand - Rom	565
24-23	Genf - Barcelona	772	13 - 3	Rom - Madrid	952
23- 1	Barcelona - Lissabon	1.276	3 - 1	Madrid - Lissabon	639
		16189			16189

Tabelle 4.16. Entfernungsmatrix des Beispiels 4.3 mit 26 Knoten

von \ nach	Liss.	Hels.	Madr.	Istan.	Athen	Buca.	Sofia	Stock.	Oslo	Belg.	Buda.	Kop.	Rom
Lissabon	0	4074	639	4326	4528	4073	3730	3691	3641	3354	3314	3504	2671
Helsinki	4074	0	3532	3128	3386	2665	2562	383	907	2753	1884	1035	3148
Madrid	639	3532	0	3687	3889	3475	1986	3466	3094	2715	2675	2846	952
Istanbul	4326	3128	3687	0	1141	638	577	3356	3306	972	1400	2689	2306
Athen	4528	3386	3889	1141	0	1254	847	3549	3499	1174	1602	2798	2508
Bucarest	4073	2665	3475	638	1254	0	407	2825	2775	732	895	2102	2050
Sofia	3730	2562	1986	577	847	407	0	2779	2729	409	810	1981	1727
Stockholm	3691	383	3466	3356	3549	2825	2779	0	549	2370	1969	626	2764
Oslo	3641	907	3094	3306	3499	2775	2729	549	0	2320	1919	588	2715
Belgrad	3354	2753	2715	972	1174	732	409	2370	2320	0	428	1637	1334
Budapest	3314	1884	2675	1400	1602	895	810	1969	1919	428	0	1345	1294
Kopenhagen	3504	1035	2846	2689	2798	2102	1981	626	588	1637	1345	0	2083
Rom	2671	3148	952	2306	2508	2050	1727	2764	2715	1334	1294	2083	0
Warschau	3438	1130	2967	2125	2278	1487	1508	1665	1615	1099	698	1129	1872
Wien	3078	1855	2605	1656	1858	1106	1060	1719	1669	684	256	915	1150
Berlin	3148	1459	2509	2304	2506	1749	1703	1076	1026	1332	904	367	1525
Amsterdam	2318	1803	1781	2795	3027	2370	2230	1420	1370	1823	1395	886	1661
London	2260	2337	1718	3141	3296	2666	2564	1954	1904	2117	1752	1238	1898
Brüssel	2098	1962	1561	2276	2978	2295	2193	1579	1529	1804	1358	1030	1492
Prag	2926	1800	2347	1968	2170	1408	1362	1417	1367	966	568	688	1300
Mailand	2294	2571	1728	2046	2248	1786	1463	2187	2138	1074	1034	1507	565
Zürich	2299	2260	1641	2219	2421	1850	1769	1877	1827	1247	1004	1205	871
Barcelona	1276	3725	637	3075	3277	2859	2536	2839	2789	2103	2093	2234	1420
Genf	2019	2422	1380	2363	2565	2116	1793	2039	1989	1391	1320	1533	882
Frankfurt/M	2542	1843	1903	2361	2563	1950	1810	1460	1410	1389	979	802	1275
Paris	1801	2263	1709	2913	3115	2357	2335	1880	1830	1941	1527	1252	1413

von \ nach	War.	Wien	Berl.	Amst.	Lond.	Brüs.	Prag	Mail.	Züri.	Barc.	Genf	Fr/M.	Paris
Lissabon	3438	3078	3148	2318	2260	2098	2926	2294	2299	1276	2019	2542	1801
Helsinki	1130	1855	1459	1803	2337	1962	1800	2571	2260	3725	2422	1843	2263
Madrid	2967	2605	2509	1781	1718	1561	2347	1728	1641	637	1380	1903	1709
Istanbul	2125	1656	2304	2795	3141	2276	1968	2046	2219	3075	2363	2361	2913
Athen	2278	1858	2506	3027	3296	2978	2170	2248	2421	3277	2565	2563	3115
Bucarest	1487	1106	1749	2370	2666	2295	1408	1786	1850	2859	2116	1950	2357
Sofia	1508	1060	1703	2230	2564	2193	1362	1463	1769	2536	1793	1810	2335
Stockholm	1665	1719	1076	1420	1954	1579	1417	2187	1877	2839	2039	1460	1880
Oslo	1615	1669	1026	1370	1904	1529	1367	2138	1827	2789	1989	1410	1830
Belgrad	1099	684	1332	1823	2117	1804	966	1074	1247	2103	1391	1389	1941
Budapest	698	256	904	1395	1752	1358	568	1034	1004	2093	1320	979	1527
Kopenhagen	1129	915	367	886	1238	1030	688	1507	1205	2234	1533	802	1252
Rom	1872	1150	1525	1661	1898	1492	1300	565	871	1420	882	1275	1413
Warschau	0	718	589	1216	1670	1299	612	1456	1298	2529	1575	1064	1627
Wien	718	0	648	1139	1582	1107	312	837	748	1928	1018	723	1271
Berlin	589	648	0	669	1114	781	337	1055	859	1847	1129	552	1073
Amsterdam	1216	1139	669	0	530	220	912	1096	801	1558	964	416	517
London	1670	1582	1114	530	0	371	1257	1321	942	1504	991	764	449
Brüssel	1299	1107	781	220	371	0	913	927	632	1338	664	409	297
Prag	612	312	337	912	1257	913	0	830	668	1480	950	504	1071
Mailand	1456	837	1055	1096	1321	927	830	0	305	1043	317	710	842
Zürich	1298	748	859	801	942	632	668	305	0	1052	280	415	572
Barcelona	2529	1928	1847	1558	1504	1338	1480	1043	1052	0	772	1295	1030
Genf	1575	1018	1129	964	991	664	950	317	280	772	0	578	517
Frankfurt/M	1064	723	552	416	764	409	504	710	415	1295	578	0	567
Paris	1627	1271	1073	517	449	297	1071	842	572	1030	517	567	0

5 Feststellungen und Ausblick

5.1 Feststellungen

1. Die ZIP-Methode der Zerlegung in zwei Teilgraphen ist neu. Aufgrund ihrer sehr einfachen Struktur lassen sich die Ergebnisse unmittelbar und direkt gewinnen.
2. Zusätzlich erhält man eine Struktur der Kanten aufgrund der Beziehung zwischen Anfangsknoten einer Kante und dem Kantenplatz innerhalb des Teilgraphen, die für weitere Optimierungen genutzt werden kann.
3. Aufgrund der Form der Normalverteilung bei den Ausprägungen scheint die Zerlegung in zwei Teilgraphen besonders wirksam.
4. Für das Verfahren ist ein heuristisch ermittelter möglichst kleiner Ausgangswert günstig aber nicht zwingend, weil relativ schnell ein nahe dem Optimum liegender Graph gefunden wird.
5. Das Rundreiseproblem zwischen 26 europäischen Hauptstädten ist kombinatorisch gelöst.

Zum Algorithmus selbst:

1. Es läßt sich mit Sicherheit sagen, ob das Optimum gefunden wurde.
2. Kann der kleinste Teilgraph ermittelt werden, so läßt sich mit großer Wahrscheinlichkeit auch der optimale Gesamtgraph bestimmen.
3. Teilgraph und Komplement-Teilgraph gehören derselben Graph-Familie an.
4. Die Symmetrie wird voll genutzt.
5. Mit wachsendem n verliert die Symmetrie gegenüber der Reihenfolgeregel an Gewicht.

5.2 Ausblick

- Es bleibt zu prüfen, ob die neue ZIP-Methode auch auf andere Optimierungsprobleme angewandt oder mit anderen Verfahren kombiniert werden kann und ggf. auch weitere Erfolge bei heuristischen Verfahren bringt.
- Alle Aspekte des neuen algebraischen Lösungsansatzes sind sicherlich noch nicht geklärt und sollten weiter untersucht werden.

Literaturverzeichnis

Grötschel M, Padberg,M: „Die optimierte Odyssee“ in: Spektrum der Wissen-schaft 4/99, S.77-85.

zusätzlich ist anzuführen:

TSPLIB: Bibliothek von TSP und vergleichbaren Problemen, zusammengestellt von Bixby B, Reinelt G, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, Version: 07.02.1995 Internet: <http://www.iwr.uni-heidelberg.de/iwr/comopt/soft/tsplib95/tsplib.html>

Anmerkungen

Zur Geschichte der ZIP-Methode

Am Anfang war es reiner Zufall, am Ende ist alles immer ganz einfach.

Die Geschichte begann 1985: Der Autor, seit einigen Jahren Programmierer, ist 1985 das erste Mal mit dem Rundreiseproblem in Berührung gekommen. Das im Fachschullehrbuch *Mathematik für Wirtschaftswissenschaften, Verlag die Wirtschaft, Berlin (DDR), 1983*, beschriebene Rundreiseproblem (S 418ff.) war sehr anschaulich und schien auf den ersten Blick einfach, eine Lösung schnell gefunden. Bald stellte der Autor aber fest, dass mit wachsender Zahl der Orte alle Rundreisen nicht mehr optimal berechenbar sind. Diese Aussage wollte er zumindest im Ansatz überprüfen.

Nach den üblichen Anfängerfehlern und simplen Lösungen, die natürlich bereits alle bekannt waren, und mit den damit verbundenen Enttäuschungen fing der Autor noch einmal von vorn an. Als "Zahlen"-Mensch (Programmierer) störte ihn, dass bei einer Rundreise jeder Ort, d.h. jede Zahl, **zweimal** vorkommt, *einmal* als Anfangs- und *einmal* als Endpunkt einer Strecke. Was kommt heraus, wenn nun jede Zahl nur einmal vorkommt? Und was bleibt bei einer Rundreise mit 6 Orten übrig? Er fing an, die Möglichkeiten aufzuschreiben, bis er bemerkte, dass es nur sehr wenige Grundformen gab. Das war der entscheidende Moment. Alles weitere bis heute baut nur noch auf diese Erkenntnis auf:

Der Autor stellte fest, dass sich die $5! = 120$ möglichen Rundreisen mit 6 Orten auf genau 15 Grundformen (= Teilrundreisen) zurückführen lassen. Die fehlenden Teile hatten genau dieselbe Struktur. Zu jeder Teilrundreise gibt es genau 8 passende "Komplement-" Teilrundreisen. Der Algorithmus war klar: Statt $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots$ sind es nur $1 \times 3 \times 5 \times 7 \dots$. Die fehlenden $2 \times 4 \times 6 \dots$ ergeben genau die Anzahl der Komplement-Teilrundreisen. Diese Zerlegungsmethode war auch offensichtlich noch nicht bekannt.

1998 fand der Autor die allgemeine Formel für die Mächtigkeit der Teilgraphen. Damit war auch die mathematische Erklärung geliefert: Die Fakultät im Nenner beschreibt die Permutation der freien Kanten, die 2-Potenzen im Nenner die Variation der freien Kanten bei Symmetrie. Wegen der Form der Zerlegung und Zusammenfügung wie ein Reißverschluss bezeichnete der Autor die neue Methode als ZIP-Methode.

Ist die ZIP-Methode wirklich neu?

Ob diese Zerlegungsmethode wirklich neu ist, kann man natürlich nie sagen. Zwei Gründe sprechen jedoch dafür, dass diese Methode allgemein noch nicht bekannt ist:

1.

Die Struktur der Zerlegung ist überraschend einfach und dehnt auf jeden Fall die Grenze der optimal berechenbaren Rundreisen nach oben aus. Man kann daher davon ausgehen, dass die ZIP-Methode veröffentlicht sein würde, wenn sie bekannt wäre. Der Autor hat bei seinen Literatur-Recherchen und schließlich auch im Internet nicht einmal im Ansatz einen Hinweis auf diese Methode gefunden. Wenn selbst Kenner des TSP wie M.Grötschel und M.Padberg 1999 in der "Optimierten Odyssee" schreiben, dass kombinatorisch Rundreisen mit 25 Knoten nicht optimal lösbar seien, dann scheint die ZIP-Methode wirklich neu zu sein.

2.

Es gibt außerdem eine einleuchtende Erklärung, warum die ZIP-Methode bisher nicht entdeckt wurde:

Jeder, der sich mit dem TSP beschäftigt, ist unmittelbar gefangen von der geographischen Vorstellung einer Rundreise. Man hat sofort die Vorstellung einer Aneinanderreihung von Strecken. Das Ende einer Strecke ist der Anfangspunkt der folgenden. H.Müller-Merbach spricht deshalb auch von einem Reihenfolgeproblem. Diese geographische Vorstellung blockiert (zuverlässig!) den Weg zum hier vorgestellten Lösungsansatz. Erst die Betrachtung der reinen Zahlen, d.h. die algebraische Sicht, führte den Autor zufällig zu dieser Lösung.

Zur Entwicklung der ZIP-Formel

Die Familie der Graphen (Gesamtgraphen) definiert sich wie folgt:

- Anzahl der Kanten = n
- Anzahl der Knoten = n
- Knotengrad je Knoten = 2
- Anzahl der Komponenten = 1

Ist der Beginn aller Graphen mit dem Knoten x_1 festgelegt, so ist die Mächtigkeit (Menge der verschiedenen Graphen) der Graphfamilie $(n-1)!$. Liegt Symmetrie vor, dann halbiert sich die Mächtigkeit zu $(n-1)! / 2$. Zerlegt man jeden Graph in zwei Teilgraphen, dann ist natürlich die Anzahl der Teilgraphen doppelt so groß wie die Anzahl der Graphen. Dabei wird jeder Graph so in zwei Teilgraphen zerlegt, dass ein Teilgraph nur jede zweite Kante des Graphen enthält.

Die Familie der Teilgraphen definiert sich somit wie folgt:

- Anzahl der Kanten = $n / 2$
- Anzahl der Knoten = n
- Knotengrad je Knoten = 1
- Anzahl der Komponenten = $n / 2$

Weil jede Kante im Teilgraphen von allen anderen Kanten unabhängig ist, kann aufgrund der durch die Zerlegung gewonnenen „Freiheiten“ jede Kante an beliebiger Stelle und bei Symmetrie außerdem in beliebiger Richtung angeordnet werden, ohne dass sich die Summe aus den gewichteten Kanten ändert. Ordnet man jetzt die Kanten jedes Teilgraphen nach einer bestimmten Reihenfolge und außerdem jede Kante nach einer bestimmten Reihenfolge des Anfangs- und Endknoten, dann ergeben sich - ausgehend von der Ursprungsmenge der Teilgraphen (s.o.) - eine Vielzahl von Doubletten. Diese Doubletten müssen für das TSP nicht mehr berechnet werden, so dass die Anzahl aller zu *berechnenden* Teilgraphen minimal im Vergleich zur Anzahl aller möglichen Graphen wird.

Das Bildungsgesetz für die Mächtigkeit dieser Teilgraphen für n Knoten ist: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (n-1)$. Daraus folgt z.B. für n = 10 Knoten:

$$\begin{aligned}
 & 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = \\
 & = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \\
 & = \frac{9!}{(1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 2)} = \\
 & = \frac{9!}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} = \\
 & = \frac{9!}{4! \cdot 2^4} = \\
 & = \frac{(10 - 1)!}{(5 - 1)! \cdot 2^{(5-1)}} = \frac{(n-1)!}{(n/2 - 1)! \cdot 2^{(n/2 - 1)}}
 \end{aligned}$$

ZIP- Formel

(17.01.2006)

26-Knoten-TSP: Zur Mindestkantenregel

Das Ziel, bei der begrenzten Enumeration möglichst frühzeitig die Berechnung abbrechen zu können, wird dadurch verbessert, dass man nicht die Gesamtlänge der Kanten, sondern nur ihre Abweichungen, d.h. die Differenz von der kleinsten Kantenlänge betrachtet. Üblicherweise wird dazu jeder Zahlenwert der Ausgangsmatrix um die kleinste Kantenlänge *aller* Kanten reduziert.

Will man die Ausgangsmatrix nicht verändern, kann man auch bei jedem Zwischenergebnis für die noch ausstehenden Kanten jeweils die kleinste Kantenlänge hinzuzählen und erst dann das Ergebnis mit dem bereits früher gefundenen kleinsten Teilgraphen vergleichen. Ist das Ergebnis größer als dieser Teilgraph, dann kann an dieser Stelle die Berechnung abgebrochen werden. Im Beispiel ist die kleinste Kantenlänge 220 km lang, so dass für jede noch ausstehende Kante dieser Mindestwert hinzugerechnet werden kann.

Nachdem jetzt bei der hier vorgestellten Lösung jedem Kantenplatz die relevanten Kanten zugeordnet werden können, muss die minimale Kantenlänge nur noch aus *diesen* Kanten und nicht mehr aus *allen* Kanten ermittelt werden. Es werden also in diesem Beispiel nicht mehr generell für jede ausstehende Kante 220 km sondern individuell für jeden einzelnen Kantenplatz der Mindestwert der dort möglichen Kanten berücksichtigt. Dieser Wert ist zumindest für die wichtigen ersten Kantenplätze höher.

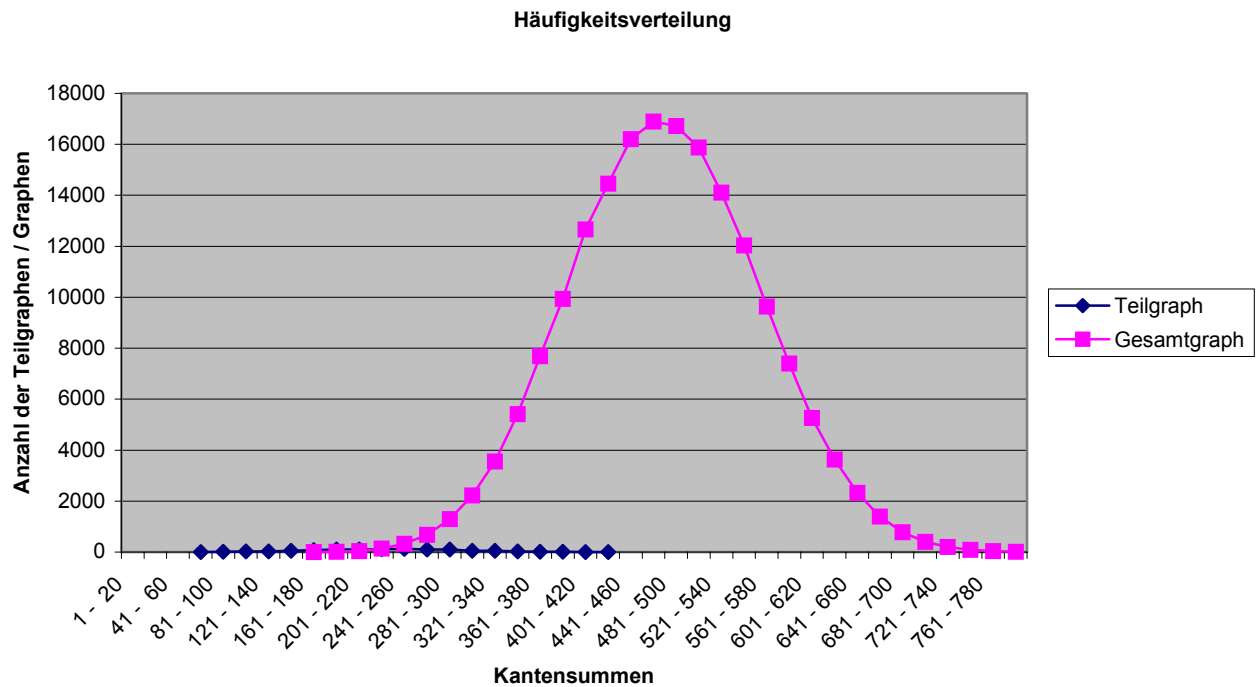
Beide o.a. Verfahren zur Ermittlung des abzuziehenden Wertes sind "*mit Zurücklegen*". Besser sind Verfahren "*ohne Zurücklegen*", denn jede Kante kann zwar ggf. an mehreren Kantenplätzen stehen, innerhalb eines Teilgraphen jedoch immer nur an einem Platz. Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung des Kantenplatzes ist die Ermittlung des abzuziehenden Wertes einfach: Man zählt für jede noch ausstehende Kante die jeweils kleinsten Kantenlängen aller Knoten zusammen: 220 + 256 + 280 + 297 + 305 + 312 + 337 + 367 + 371 + 383 + 407 + 409

Ohne Zurücklegen aber mit Berücksichtigung des Kantenplatzes (und damit implizit auch mit Berücksichtigung der Reihenfolgeregel, dass die Folgekante immer mit einer größeren Knoten-Nr. beginnen muss) wird die bisher einfache Berechnung schwieriger. Der abzuziehende Wert muss für jeden Kantenplatz aus den kleinsten Kanten der noch ausstehenden Kantenplätzen getrennt berechnet werden. Diese ggf. manuell durchzuführende Berechnung bringt schon gute Werte. Der optimalen Wert je Kantenplatz läßt sich in diesem Beispiel aber nur maschinell berechnen, weil bei der Berechnung nicht nur Kanten mit der kleinsten Kantenlängen je Knoten zu berücksichtigen sind.

	Kantenplatz im Teilgraph												
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
<i>mit Zurückl.</i>													
je 220 km	2640	2420	2200	1980	1760	1540	1320	1100	880	660	440	220	0
Platz einzeln	3642	3259	2682	2275	1868	1612	1356	1100	880	660	440	220	0
<i>ohne Zurück.</i>													
kl. Kanten	3944	3535	3128	2745	2374	2007	1670	1358	1053	756	476	220	0
Platz einzeln	4150	3767	3190	2781	2374	2007	1670	1358	1053	756	500	220	0
programmiert	5518	4869	4232	3464	2915	2403	1994	1542	1093	756	500	220	0

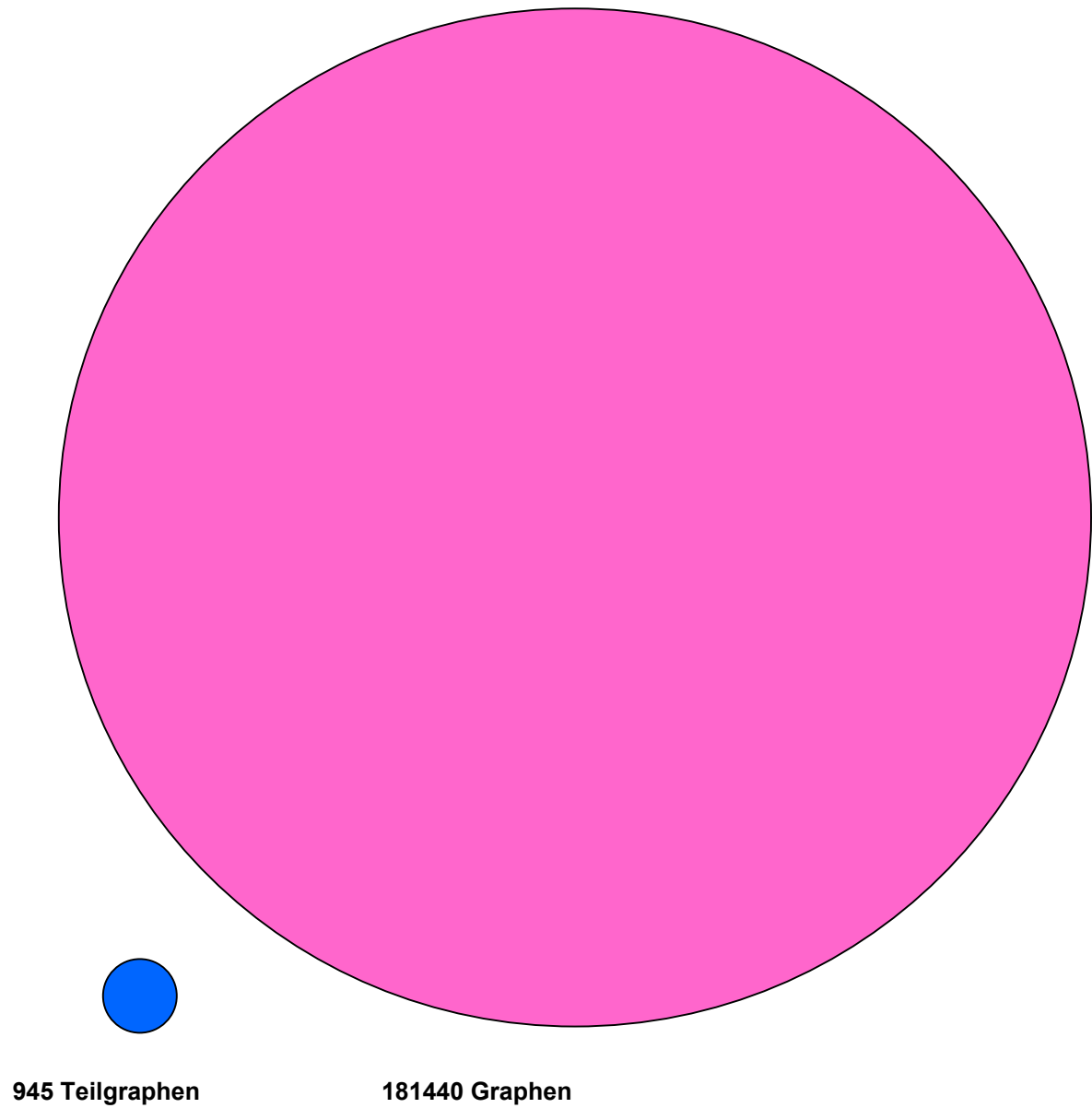
10-Knoten-TSP: Häufigkeitsverteilung Teilgraph / Graph

Summe der Kantenlängen	Anzahl der Teilgraphen	Anzahl der Gesamtgraphen	
61 - 80	3		$\Sigma 76 =$ kleinster Teilgraph
81 - 100	8		
101 - 120	19		
121 - 140	20		
141 - 160	47		
161 - 180	73	4	$\Sigma 175 =$ kleinster Graph
181 - 200	95	15	
201 - 220	103	43	
221 - 240	110	136	
241 - 260	120	327	
261 - 280	95	677	
281 - 300	97	1.292	
301 - 320	53	2.224	
321 - 340	46	3.560	
341 - 360	25	5.414	
361 - 380	18	7.690	
381 - 400	8	9.932	
401 - 420	3	12.658	
421 - 440	2	14.464	$\Sigma 433 =$ größter Teilgraph
441 - 460		16.210	
461 - 480		16.893	
481 - 500		16.721	
501 - 520		15.876	
521 - 540		14.105	
541 - 560		12.035	
561 - 580		9.634	
581 - 600		7.401	
601 - 620		5.260	
621 - 640		3.632	
641 - 660		2.323	
661 - 680		1.397	
681 - 700		783	
701 - 720		402	
721 - 740		196	
741 - 760		82	
761 - 780		43	
781 - 800		11	$\Sigma 799 =$ größter Graph
insgesamt:	945 Teilgraphen	181.440 Graphen	

**Bemerkung:**

Die Häufigkeitsverteilung lässt sich graphisch - wegen der extrem unterschiedlichen Anzahl von Teilgraphen und Gesamtgraphen - nur andeutungsweise darstellen.

10-Knoten-TSP: Vergleich Anzahl Teilgraphen / Graphen



6-Knoten-TSP: alle 120 Graphen mit ihren Teilgraphen

Nr.	Teilgraph
1.	1-2, 3-4, 5-6
2.	1-2, 3-5, 4-6
3.	1-2, 3-6, 4-5
4.	1-3, 2-4, 5-6
5.	1-3, 2-5, 4-6
6.	1-3, 2-6, 4-5
7.	1-4, 2-3, 5-6
8.	1-4, 2-5, 3-6
9.	1-4, 2-6, 3-5
10.	1-5, 2-3, 4-6
11.	1-5, 2-4, 3-6
12.	1-5, 2-6, 3-4
13.	1-6, 2-3, 4-5
14.	1-6, 2-4, 3-5
15.	1-6, 2-5, 3-4

Rundreise	Kanten des Gesamtgraphen	1. Teilgraph	2. Teilgraph	Nr.	Nr.
1. 1-2-3-4-5-6-1	1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-1	1-2, 3-4, 5-6	1-6, 2-3, 4-5	1.	13.
2. 1-2-3-4-6-5-1	1-2, 2-3, 3-4, 4-6, 6-5, 5-1	1-2, 3-4, 5-6	1-5, 2-3, 4-6	1.	10.
3. 1-2-3-5-4-6-1	1-2, 2-3, 3-5, 5-4, 4-6, 6-1	1-2, 3-5, 4-6	1-6, 2-3, 4-5	2.	13.
4. 1-2-3-5-6-4-1	1-2, 2-3, 3-5, 5-6, 6-4, 4-1	1-2, 3-5, 4-6	1-4, 2-3, 5-6	2.	7.
5. 1-2-3-6-4-5-1	1-2, 2-3, 3-6, 6-4, 4-5, 5-1	1-2, 3-6, 4-5	1-5, 2-3, 4-6	3.	10.
6. 1-2-3-6-5-4-1	1-2, 2-3, 3-6, 6-5, 5-4, 4-1	1-2, 3-6, 4-5	1-4, 2-3, 5-6	3.	7.
7. 1-2-4-3-5-6-1	1-2, 2-4, 4-3, 3-5, 5-6, 6-1	1-2, 3-4, 5-6	1-6, 2-4, 3-5	1.	14.
8. 1-2-4-3-6-5-1	1-2, 2-4, 4-3, 3-6, 6-5, 5-1	1-2, 3-4, 5-6	1-5, 2-4, 3-6	1.	11.
9. 1-2-4-5-3-6-1	1-2, 2-4, 4-5, 5-3, 3-6, 6-1	1-2, 3-6, 4-5	1-6, 2-4, 3-5	3.	14.
10. 1-2-4-5-6-3-1	1-2, 2-4, 4-5, 5-6, 6-3, 3-1	1-2, 3-6, 4-5	1-3, 2-4, 5-6	3.	4.
11. 1-2-4-6-3-5-1	1-2, 2-4, 4-6, 6-3, 3-5, 5-1	1-2, 3-5, 4-6	1-5, 2-4, 3-6	2.	11.
12. 1-2-4-6-5-3-1	1-2, 2-4, 4-6, 6-5, 5-3, 3-1	1-2, 3-5, 4-6	1-3, 2-4, 5-6	2.	4.
13. 1-2-5-3-4-6-1	1-2, 2-5, 5-3, 3-4, 4-6, 6-1	1-2, 3-5, 4-6	1-6, 2-5, 3-4	2.	15.
14. 1-2-5-3-6-4-1	1-2, 2-5, 5-3, 3-6, 6-4, 4-1	1-2, 3-5, 4-6	1-4, 2-5, 3-6	2.	8.
15. 1-2-5-4-3-6-1	1-2, 2-5, 5-4, 4-3, 3-6, 6-1	1-2, 3-6, 4-5	1-6, 2-5, 3-4	3.	15.
16. 1-2-5-4-6-3-1	1-2, 2-5, 5-4, 4-6, 6-3, 3-1	1-2, 3-6, 4-5	1-3, 2-5, 4-6	3.	5.
17. 1-2-5-6-3-4-1	1-2, 2-5, 5-6, 6-3, 3-4, 4-1	1-2, 3-4, 5-6	1-4, 2-5, 3-6	1.	8.
18. 1-2-5-6-4-3-1	1-2, 2-5, 5-6, 6-4, 4-3, 3-1	1-2, 3-4, 5-6	1-3, 2-5, 4-6	1.	5.
19. 1-2-6-3-4-5-1	1-2, 2-6, 6-3, 3-4, 4-5, 5-1	1-2, 3-6, 4-5	1-5, 2-6, 3-4	3.	12.
20. 1-2-6-3-5-4-1	1-2, 2-6, 6-3, 3-5, 5-4, 4-1	1-2, 3-6, 4-5	1-4, 2-6, 3-5	3.	9.
21. 1-2-6-4-3-5-1	1-2, 2-6, 6-4, 4-3, 3-5, 5-1	1-2, 3-5, 4-6	1-5, 2-6, 3-4	2.	12.
22. 1-2-6-4-5-3-1	1-2, 2-6, 6-4, 4-5, 5-3, 3-1	1-2, 3-5, 4-6	1-3, 2-6, 4-5	2.	6.
23. 1-2-6-5-3-4-1	1-2, 2-6, 6-5, 5-3, 3-4, 4-1	1-2, 3-4, 5-6	1-4, 2-6, 3-5	1.	9.
24. 1-2-6-5-4-3-1	1-2, 2-6, 6-5, 5-4, 4-3, 3-1	1-2, 3-4, 5-6	1-3, 2-6, 4-5	1.	6.

Rundreise	Kanten des Gesamtgraphen	1. Teilgraph	2. Teilgraph	Nr.	Nr.
25. 1-3-2-4-5-6-1	1-3, 3-2 , 2-4, 4-5 , 5-6, 6-1	1-3, 2-4, 5-6	1-6 , 2-3 , 4-5	4.	13.
26. 1-3-2-4-6-5-1	1-3, 3-2 , 2-4, 4-6 , 6-5, 5-1	1-3, 2-4, 5-6	1-5 , 2-3 , 4-6	4.	10.
27. 1-3-2-5-4-6-1	1-3, 3-2 , 2-5, 5-4 , 4-6, 6-1	1-3, 2-5, 4-6	1-6 , 2-3 , 4-5	5.	13.
28. 1-3-2-5-6-4-1	1-3, 3-2 , 2-5, 5-6 , 6-4, 4-1	1-3, 2-5, 4-6	1-4 , 2-3 , 5-6	5.	7.
29. 1-3-2-6-4-5-1	1-3, 3-2 , 2-6, 6-4 , 4-5, 5-1	1-3, 2-6, 4-5	1-5 , 2-3 , 4-6	6.	10.
30. 1-3-2-6-5-4-1	1-3, 3-2 , 2-6, 6-5 , 5-4, 4-1	1-3, 2-6, 4-5	1-4 , 2-3 , 5-6	6.	7.
31. 1-3-4-2-5-6-1	1-3, 3-4 , 4-2, 2-5 , 5-6, 6-1	1-3, 2-4, 5-6	1-6 , 2-5 , 3-4	4.	15.
32. 1-3-4-2-6-5-1	1-3, 3-4 , 4-2, 2-6 , 6-5, 5-1	1-3, 2-4, 5-6	1-5 , 2-6 , 3-4	4.	12.
33. 1-3-4-5-2-6-1	1-3, 3-4 , 4-5, 5-2 , 2-6, 6-1	1-3, 2-6, 4-5	1-6 , 2-5 , 3-4	6.	15.
34. 1-3-4-5-6-2-1	1-3, 3-4 , 4-5, 5-6 , 6-2, 2-1	1-3, 2-6, 4-5	1-2 , 3-4 , 5-6	6.	1.
35. 1-3-4-6-2-5-1	1-3, 3-4 , 4-6, 6-2 , 2-5, 5-1	1-3, 2-5, 4-6	1-5 , 2-6 , 3-4	5.	12.
36. 1-3-4-6-5-2-1	1-3, 3-4 , 4-6, 6-5 , 5-2, 2-1	1-3, 2-5, 4-6	1-2 , 3-4 , 5-6	5.	1.
37. 1-3-5-2-4-6-1	1-3, 3-5 , 5-2, 2-4 , 4-6, 6-1	1-3, 2-5, 4-6	1-6 , 2-4 , 3-5	5.	14.
38. 1-3-5-2-6-4-1	1-3, 3-5 , 5-2, 2-6 , 6-4, 4-1	1-3, 2-5, 4-6	1-4 , 2-6 , 3-5	5.	9.
39. 1-3-5-4-2-6-1	1-3, 3-5 , 5-4, 4-2 , 2-6, 6-1	1-3, 2-6, 4-5	1-6 , 2-4 , 3-5	6.	14.
40. 1-3-5-4-6-2-1	1-3, 3-5 , 5-4, 4-6 , 6-2, 2-1	1-3, 2-6, 4-5	1-2 , 3-5 , 4-6	6.	2.
41. 1-3-5-6-2-4-1	1-3, 3-5 , 5-6, 6-2 , 2-4, 4-1	1-3, 2-4, 5-6	1-4 , 2-6 , 3-5	4.	9.
42. 1-3-5-6-4-2-1	1-3, 3-5 , 5-6, 6-4 , 4-2, 2-1	1-3, 2-4, 5-6	1-2 , 3-5 , 4-6	4.	2.
43. 1-3-6-2-4-5-1	1-3, 3-6 , 6-2, 2-4 , 4-5, 5-1	1-3, 2-6, 4-5	1-5 , 2-4 , 3-6	6.	11.
44. 1-3-6-2-5-4-1	1-3, 3-6 , 6-2, 2-5 , 5-4, 4-1	1-3, 2-6, 4-5	1-4 , 2-5 , 3-6	6.	8.
45. 1-3-6-4-2-5-1	1-3, 3-6 , 6-4, 4-2 , 2-5, 5-1	1-3, 2-5, 4-6	1-5 , 2-4 , 3-6	5.	11.
46. 1-3-6-4-5-2-1	1-3, 3-6 , 6-4, 4-5 , 5-2, 2-1	1-3, 2-5, 4-6	1-2 , 3-6 , 4-5	5.	3.
47. 1-3-6-5-2-4-1	1-3, 3-6 , 6-5, 5-2 , 2-4, 4-1	1-3, 2-4, 5-6	1-4 , 2-5 , 3-6	4.	8.
48. 1-3-6-5-4-2-1	1-3, 3-6 , 6-5, 5-4 , 4-2, 2-1	1-3, 2-4, 5-6	1-2 , 3-6 , 4-5	4.	3.
49. 1-4-2-3-5-6-1	1-4, 4-2 , 2-3, 3-5 , 5-6, 6-1	1-4, 2-3, 5-6	1-6 , 2-4 , 3-5	7.	14.
50. 1-4-2-3-6-5-1	1-4, 4-2 , 2-3, 3-6 , 6-5, 5-1	1-4, 2-3, 5-6	1-5 , 2-4 , 3-6	7.	11.
51. 1-4-2-5-3-6-1	1-4, 4-2 , 2-5, 5-3 , 3-6, 6-1	1-4, 2-5, 3-6	1-6 , 2-4 , 3-5	8.	14.
52. 1-4-2-5-6-3-1	1-4, 4-2 , 2-5, 5-6 , 6-3, 3-1	1-4, 2-5, 3-6	1-3 , 2-4 , 5-6	8.	4.
53. 1-4-2-6-3-5-1	1-4, 4-2 , 2-6, 6-3 , 3-5, 5-1	1-4, 2-6, 3-5	1-5 , 2-4 , 3-6	9.	11.
54. 1-4-2-6-5-3-1	1-4, 4-2 , 2-6, 6-5 , 5-3, 3-1	1-4, 2-6, 3-5	1-3 , 2-4 , 5-6	9.	4.
55. 1-4-3-2-5-6-1	1-4, 4-3 , 3-2, 2-5 , 5-6, 6-1	1-4, 2-3, 5-6	1-6 , 2-5 , 3-4	7.	15.
56. 1-4-3-2-6-5-1	1-4, 4-3 , 3-2, 2-6 , 6-5, 5-1	1-4, 2-3, 5-6	1-5 , 2-6 , 3-4	7.	12.
57. 1-4-3-5-2-6-1	1-4, 4-3 , 3-5, 5-2 , 2-6, 6-1	1-4, 2-6, 3-5	1-6 , 2-5 , 3-4	9.	15.
58. 1-4-3-5-6-2-1	1-4, 4-3 , 3-5, 5-6 , 6-2, 2-1	1-4, 2-6, 3-5	1-2 , 3-4 , 5-6	9.	1.
59. 1-4-3-6-2-5-1	1-4, 4-3 , 3-6, 6-2 , 2-5, 5-1	1-4, 2-5, 3-6	1-5 , 2-6 , 3-4	8.	12.
60. 1-4-3-6-5-2-1	1-4, 4-3 , 3-6, 6-5 , 5-2, 2-1	1-4, 2-5, 3-6	1-2 , 3-4 , 5-6	8.	1.
61. 1-4-5-2-3-6-1	1-4, 4-5 , 5-2, 2-3 , 3-6, 6-1	1-4, 2-5, 3-6	1-6 , 2-3 , 4-5	8.	13.
62. 1-4-5-2-6-3-1	1-4, 4-5 , 5-2, 2-6 , 6-3, 3-1	1-4, 2-5, 3-6	1-3 , 2-6 , 4-5	8.	6.
63. 1-4-5-3-2-6-1	1-4, 4-5 , 5-3, 3-2 , 2-6, 6-1	1-4, 2-6, 3-5	1-6 , 2-3 , 4-5	9.	13.
64. 1-4-5-3-6-2-1	1-4, 4-5 , 5-3, 3-6 , 6-2, 2-1	1-4, 2-6, 3-5	1-2 , 3-6 , 4-5	9.	3.
65. 1-4-5-6-2-3-1	1-4, 4-5 , 5-6, 6-2 , 2-3, 3-1	1-4, 2-3, 5-6	1-3 , 2-6 , 4-5	7.	6.
66. 1-4-5-6-3-2-1	1-4, 4-5 , 5-6, 6-3 , 3-2, 2-1	1-4, 2-3, 5-6	1-2 , 3-6 , 4-5	7.	3.
67. 1-4-6-2-3-5-1	1-4, 4-6 , 6-2, 2-3 , 3-5, 5-1	1-4, 2-6, 3-5	1-5 , 2-3 , 4-6	9.	10.
68. 1-4-6-2-5-3-1	1-4, 4-6 , 6-2, 2-5 , 5-3, 3-1	1-4, 2-6, 3-5	1-3 , 2-5 , 4-6	9.	5.
69. 1-4-6-3-2-5-1	1-4, 4-6 , 6-3, 3-2 , 2-5, 5-1	1-4, 2-5, 3-6	1-5 , 2-3 , 4-6	8.	10.
70. 1-4-6-3-5-2-1	1-4, 4-6 , 6-3, 3-5 , 5-2, 2-1	1-4, 2-5, 3-6	1-2 , 3-5 , 4-6	8.	2.
71. 1-4-6-5-2-3-1	1-4, 4-6 , 6-5, 5-2 , 2-3, 3-1	1-4, 2-3, 5-6	1-3 , 2-5 , 4-6	7.	5.
72. 1-4-6-5-3-2-1	1-4, 4-6 , 6-5, 5-3 , 3-2, 2-1	1-4, 2-3, 5-6	1-2 , 3-5 , 4-6	7.	2.

Rundreise	Kanten des Gesamtgraphen	1. Teilgraph	2. Teilgraph	Nr.	Nr.
73.	1-5, 5-2 , 2-3, 3-4 , 4-6, 6-1	1-5, 2-3, 4-6	1-6 , 2-5 , 3-4	10.	15.
74.	1-5, 5-2 , 2-3, 3-6 , 6-4, 4-1	1-5, 2-3, 4-6	1-4 , 2-5 , 3-6	10.	8.
75.	1-5, 5-2 , 2-4, 4-3 , 3-6, 6-1	1-5, 2-4, 3-6	1-6 , 2-5 , 3-4	11.	15.
76.	1-5, 5-2 , 2-4, 4-6 , 6-3, 3-1	1-5, 2-4, 3-6	1-3 , 2-5 , 4-6	11.	5.
77.	1-5, 5-2 , 2-6, 6-3 , 3-4, 4-1	1-5, 2-6, 3-4	1-4 , 2-5 , 3-6	12.	8.
78.	1-5, 5-2 , 2-6, 6-4 , 4-3, 3-1	1-5, 2-6, 3-4	1-3 , 2-5 , 4-6	12.	5.
79.	1-5, 5-3 , 3-2, 2-4 , 4-6, 6-1	1-5, 2-3, 4-6	1-6 , 2-4 , 3-5	10.	14.
80.	1-5, 5-3 , 3-2, 2-6 , 6-4, 4-1	1-5, 2-3, 4-6	1-4 , 2-6 , 3-5	10.	9.
81.	1-5, 5-3 , 3-4, 4-2 , 2-6, 6-1	1-5, 2-6, 3-4	1-6 , 2-4 , 3-5	12.	14.
82.	1-5, 5-3 , 3-4, 4-6 , 6-2, 2-1	1-5, 2-6, 3-4	1-2 , 3-5 , 4-6	12.	2.
83.	1-5, 5-3 , 3-6, 6-2 , 2-4, 4-1	1-5, 2-4, 3-6	1-4 , 2-6 , 3-5	11.	9.
84.	1-5, 5-3 , 3-6, 6-4 , 4-2, 2-1	1-5, 2-4, 3-6	1-2 , 3-5 , 4-6	11.	2.
85.	1-5, 5-4 , 4-2, 2-3 , 3-6, 6-1	1-5, 2-4, 3-6	1-6 , 2-3 , 4-5	11.	14.
86.	1-5, 5-4 , 4-2, 2-6 , 6-3, 3-1	1-5, 2-4, 3-6	1-3 , 2-6 , 4-5	11.	6.
87.	1-5, 5-4 , 4-3, 3-2 , 2-6, 6-1	1-5, 2-6, 3-4	1-6 , 2-3 , 4-5	12.	14.
88.	1-5, 5-4 , 4-3, 3-6 , 6-2, 2-1	1-5, 2-6, 3-4	1-2 , 3-6 , 4-5	12.	3.
89.	1-5, 5-4 , 4-6, 6-2 , 2-3, 3-1	1-5, 2-3, 4-6	1-3 , 2-6 , 4-5	10.	6.
90.	1-5, 5-4 , 4-6, 6-3 , 3-2, 2-1	1-5, 2-3, 4-6	1-2 , 3-6 , 4-5	10.	3.
91.	1-5, 5-6 , 6-2, 2-3 , 3-4, 4-1	1-5, 2-6, 3-4	1-4 , 2-3 , 5-6	12.	7.
92.	1-5, 5-6 , 6-2, 2-4 , 4-3, 3-1	1-5, 2-6, 3-4	1-3 , 2-4 , 5-6	12.	4.
93.	1-5, 5-6 , 6-3, 3-2 , 2-4, 4-1	1-5, 2-4, 3-6	1-4 , 2-3 , 5-6	11.	7.
94.	1-5, 5-6 , 6-3, 3-4 , 4-2, 2-1	1-5, 2-4, 3-6	1-2 , 3-4 , 5-6	11.	1.
95.	1-5, 5-6 , 6-4, 4-2 , 2-3, 3-1	1-5, 2-3, 4-6	1-3 , 2-4 , 5-6	10.	4.
96.	1-5, 5-6 , 6-4, 4-3 , 3-2, 2-1	1-5, 2-3, 4-6	1-2 , 3-4 , 5-6	10.	1.
97.	1-6, 6-2 , 2-3, 3-4 , 4-5, 5-1	1-6, 2-3, 4-5	1-5 , 2-6 , 3-4	13.	12.
98.	1-6, 6-2 , 2-3, 3-5 , 5-4, 4-1	1-6, 2-3, 4-5	1-4 , 2-6 , 3-5	13.	9.
99.	1-6, 6-2 , 2-4, 4-3 , 3-5, 5-1	1-6, 2-4, 3-5	1-5 , 2-6 , 3-4	14.	12.
100.	1-6, 6-2 , 2-4, 4-5 , 5-3, 3-1	1-6, 2-4, 3-5	1-3 , 2-6 , 4-5	14.	6.
101.	1-6, 6-2 , 2-5, 5-3 , 3-4, 4-1	1-6, 2-5, 3-4	1-4 , 2-6 , 3-5	15.	9.
102.	1-6, 6-2 , 2-5, 5-4 , 4-3, 3-1	1-6, 2-5, 3-4	1-3 , 2-6 , 4-5	15.	6.
103.	1-6, 6-3 , 3-2, 2-4 , 4-5, 5-1	1-6, 2-3, 4-5	1-5 , 2-4 , 3-6	13.	11.
104.	1-6, 6-3 , 3-2, 2-5 , 5-4, 4-1	1-6, 2-3, 4-5	1-4 , 2-5 , 3-6	13.	8.
105.	1-6, 6-3 , 3-4, 4-2 , 2-5, 5-1	1-6, 2-5, 3-4	1-5 , 2-4 , 3-6	15.	11.
106.	1-6, 6-3 , 3-4, 4-5 , 5-2, 2-1	1-6, 2-5, 3-4	1-2 , 3-6 , 4-5	15.	3.
107.	1-6, 6-3 , 3-5, 5-2 , 2-4, 4-1	1-6, 2-4, 3-5	1-4 , 2-5 , 3-6	14.	8.
108.	1-6, 6-3 , 3-5, 5-4 , 4-2, 2-1	1-6, 2-4, 3-5	1-2 , 3-6 , 4-5	14.	3.
109.	1-6, 6-4 , 4-2, 2-3 , 3-5, 5-1	1-6, 2-4, 3-5	1-5 , 2-3 , 4-6	14.	10.
110.	1-6, 6-4 , 4-2, 2-5 , 5-3, 3-1	1-6, 2-4, 3-5	1-3 , 2-5 , 4-6	14.	5.
111.	1-6, 6-4 , 4-3, 3-2 , 2-5, 5-1	1-6, 2-5, 3-4	1-5 , 2-3 , 4-6	15.	10.
112.	1-6, 6-4 , 4-3, 3-5 , 5-2, 2-1	1-6, 2-5, 3-4	1-2 , 3-5 , 4-6	15.	2.
113.	1-6, 6-4 , 4-5, 5-2 , 2-3, 3-1	1-6, 2-3, 4-5	1-3 , 2-5 , 4-6	13.	5.
114.	1-6, 6-4 , 4-5, 5-3 , 3-2, 2-1	1-6, 2-3, 4-5	1-2 , 3-5 , 4-6	13.	2.
115.	1-6, 6-5 , 5-2, 2-3 , 3-4, 4-1	1-6, 2-5, 3-4	1-4 , 2-3 , 5-6	15.	7.
116.	1-6, 6-5 , 5-2, 2-4 , 4-3, 3-1	1-6, 2-5, 3-4	1-3 , 2-4 , 5-6	15.	4.
117.	1-6, 6-5 , 5-3, 3-2 , 2-4, 4-1	1-6, 2-4, 3-5	1-4 , 2-3 , 5-6	14.	7.
118.	1-6, 6-5 , 5-3, 3-4 , 4-2, 2-1	1-6, 2-4, 3-5	1-2 , 3-4 , 5-6	14.	1.
119.	1-6, 6-5 , 5-4, 4-2 , 2-3, 3-1	1-6, 2-3, 4-5	1-3 , 2-4 , 5-6	13.	4.
120.	1-6, 6-5 , 5-4, 4-3 , 3-2, 2-1	1-6, 2-3, 4-5	1-2 , 3-4 , 5-6	13.	1.